Memoirs of American Mathematical Society
Number 243

CATEGORICAL FRAMEWORK FOR THE STUDY OF SINGULAR SPACES

William Fulton

Robert MacPherson

Brown University
Providence, Rhode Island

Published by the
American Mathematical Society
Providence, Rhode Island, USA

May 1981 . Volume 31 . Number 243

МАТЕМАТИКА

НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ

РЕДАКТОРЫ СЕРИИ: А.Н. КОЛМОГОРОВ, С.П. НОВИКОВ

33

У. ФУЛТОН

Р. МАК-ФЁРСОН

КАТЕГОРНЫЙ ПОДХОД К ИЗУЧЕНИЮ ПРОСТРАНСТВ С ОСОБЕННОСТЯМИ

Перевод с английского
А.В. и В.В. Шокуровых
под редакцией
В.М. Бухштабера

Москва
МИР
1983

1*

ББК 22.152
Ф94
УДК 513.836

Фултон У., Мак-Фёрсон Р.

Категорный подход к изучению пространств с особенностями: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 216 с., ил.

В книге, написанной активно работающими американскими математиками, излагается развитый ими новый подход к изучению многообразий с особенностями (бивариантные теории). В последние годы интерес к этому направлению резко возрос в связи с приложениями в алгебре, теории дифференциальных уравнений и математической физике.

Русское издание дополнено работой, написанной вторым из авторов совместно с Дж. Чигером и М. Горески и содержащей изложение еще одного нового подхода к изучению многообразий с особенностями.

Для математиков разных специальностей.

Редакция литературы по математическим наукам

Ф $\frac{1702040000-122}{041(01)-82}$ 18 – 83, ч. 1

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

С конца 50-х годов на протяжении почти двадцати лет наблюдалось бурное развитие гомологических методов и проникновение их в самые различные разделы математики. В этот период была осознана идея, что для решения той или иной задачи нет необходимости строить изощренные инварианты со значениями в классических гомологиях - достаточно подобрать гомологии, соответствующие характеру задачи.

Блестящим подтверждением этой идеи явилось решение Адамсом проблемы векторных полей на сфере. Напомним, что многочисленные попытки решения задачи о максимальном числе линейно-независимых векторных полей на сфере приводили к инвариантам, описываемым когомологическими операциями всё более и более высокого порядка и потому всё более необозримым. Привлечение К-теории позволило построить инварианты, которые описывались примарными операциями (в К-теории) и позволили полностью решить эту фундаментальную проблему.

Яркий пример дает также история знаменитой "Hauptvermutung" [1]. Следует ли из гомеоморфности полиэдров $|K|$ и $|L|$ существование кусочно-линейного гомеоморфизма между ними? Применение теории кобордизмов позволило Сулливану получить (положительное) решение этой проблемы для односвязных кусочно-линейных многообразий M, таких что $\dim M \geqslant 5$ и группа $H^4(M;\mathbb{Z})$ не имеет 2-кручения. Заметим, что при этом Сулливану помимо классических потребовалось использовать и специальные кобордизмы, которые впоследствии легли в основу теории Бааса - Сулливана кобордизмов с особенностями.

---

[1] Главной гипотезы (нем.).

Характерной особенностью рассматриваемого периода было то, что благодаря гомологическим методам произошло взаимное обогащение самых различных разделов математики - алгебраической топологии, алгебраической геометрии, комплексного анализа, функционального анализа и многих других. Так, основные идеи K-теории принадлежат алгебраической геометрии и возникли на основе обобщения теоремы Римана - Роха, данного Гротендиком. Благодаря известным работам Атьи и Хирцебруха K-теория стала мощным орудием алгебраической топологии. Затем, обогащенная постановками задач и результатами топологии, K-теория породила новое направление современной алгебры - алгебраическую K-теорию, которая в свою очередь нашла важные приложения в теории алгебраических чисел и алгебраических функций.

В настоящее время в истории теории гомологий период бурного развития сменился более спокойным периодом. По-видимому, пришла пора систематизировать накопленные методы и результаты, расширить области их приложений, глубже осознать выявленные взаимосвязи.

Предлагаемая читателю книга содержит важные результаты в этом направлении. В центре ее внимания лежит понятие бивариантной теории. Введение этого понятия опирается на глубокое замечание, подсказанное в основном развитием теории кобордизмов, что раздельное изучение теорий гомологий и когомологий ничем не оправдано. Например, давно отмечалось, что в теории кобордизмов двойственность Пуанкаре с геометрической точки зрения выступает на уровне тавтологии.

В бивариантной теории группа сопоставляется морфизму $f:X\to Y$ исходной категории, а не объекту, как это обычно делается в теориях гомологий. В каждой бивариантной теории $\mathbb{T}$ определяются контравариантная теория $\mathbb{T}^*$, в которой объекту X сопоставляется кольцо $\mathbb{T}(X \xrightarrow{id} X)$, и ковариантная теория $\mathbb{T}_*$, в которой объекту X сопоставляется группа $\mathbb{T}(X \to$ точка$)$. Авторы показывают, что многие классические функторы (среди них гомологии, K-теория, бордизмы, алгебраическая K-теория) продолжаются до бивариантных теорий. Поясним содержательный смысл такого продолжения на примере категории топологических пространств и классических гомологий. Каждому отображению $f:X\to Y$ отвечает в некотором смысле аппроксимация пространства X, зависящая от Y и f. Бивариантная теория сопоставляет пространству X группу гомологий его аппроксимации. В случае когда пространство X "хорошее" и

аппроксимация его тоже "хорошая", мы должны получить обычную группу гомологий. Это руководящее соображение подтверждается тем результатом, что если $f: X \to Y$ – отображение ориентированных многообразий, то группа $T(f: X \to Y)$ совпадает с классической группой $H_*(X) \cong H^*(X)$.

Предлагаемая интерпретация бивариантного продолжения теорий гомологий наводит на мысль, что было бы полезно провести сравнение подхода авторов с известным подходом теории шейпов, развитие которой было стимулировано задачей изучения топологических пространств, локально плохо устроенных (К.Борсук. Теория шейпов. – М.: Мир, 1976).

Создание бивариантной теории, как подчеркнуто в самом названии книги, было стимулировано проблемой изучения пространств с особенностями. В качестве ключевой задачи авторы взяли теорему Римана – Роха – Гротендика, и можно сказать, что основной их результат – это доказательство того, что формализм бивариантной теории полностью отвечает характеру задачи получения теорем типа теоремы Римана – Роха – Гротендика в широком классе категорий, в том числе в категории пространств с особенностями.

Стоит подчеркнуть, что помимо оригинальных результатов в книге дано изложение с единых позиций ряда фундаментальных достижений алгебраической топологии и алгебраической геометрии; здесь нашел выражение отмеченный выше характерный синтетический аспект упомянутого периода.

В русское издание включен в качестве добавления перевод работы "$\mathcal{L}^2$-когомологии и ГМ-гомологии алгебраических многообразий с особенностями", написанной Дж.Чигером, М.Горески и вторым из авторов книги, Р.Мак-Фёрсоном. Ключевой задачей этой работы является перенесение на случай особых алгебраических многообразий теорем "кэлерова пакета". Основной результат здесь – исследование указанных в заглавии работы гомологий и когомологий и доказательство того, что они полностью отвечают характеру решаемой задачи. Таким образом, основной текст и добавление объединяет та идея, об осознании которой было сказано в самом начале.

Р.Мак-Фёрсон любезно согласился написать специальное предисловие к расширенному изданию. Пользуясь случаем, выражаем ему благодарность.

В. Бухштабер

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящее издание включена в качестве добавления работа, написанная Дж. Чигером, М. Горески и мною. Основной текст и это добавление – две независимые попытки развить теорию гомологий, пригодную для изучения пространств с особенностями.

Пространства с особенностями исследованы намного хуже, чем гладкие многообразия. Однако все изначальные проблемы топологии и алгебраической геометрии, дифференциальных уравнений, групп Ли приводят как к гладким многообразиям, так и к особым пространствам[1]. Даже при изучении собственно гладких многообразий на сцене часто появляются вспомогательные пространства, которые уже особы, – множество особых точек гладких отображений, замыкания орбит действий групп и т.п. Кроме того, понимание того или иного явления (скажем, теоремы Римана – Роха) для пространств с особенностями позволяет лучше понять это явление для неособых многообразий.

О недостаточности обычных гомологий $H(X)$ для исследования некоторых проблем, касающихся особых пространств X, достаточно подробно говорится во введениях к каждой из двух частей книги и к добавлению. Одна из главных проблем – в отсутствии пересечения

$$H(X) \times H(X) \longrightarrow H(X).$$

Другая проблема связана с тем, что обычные гомологии гомотопически инвариантны, а ведь гомотопическая эквивалентность может радикально изменить структуру особенностей пространства.

---

[1] Термины "пространство с особенностями" и "особое пространство" означают одно и то же. В дальнейшем мы чаще используем второй из них ввиду его большей грамматической гибкости. Прим. перев.

Два представленных в книге подхода – это бивариантные гомологии, которые сопоставляют отображению пространств $X \xrightarrow{f} Y$ группу $H(X \xrightarrow{f} Y)$, и ГМ-гомологии, сопоставляющие пространству X группу $IH(X)$. В обеих этих теориях имеются произведения типа пересечения

$$H(X \xrightarrow{f} Y) \times H(Y \xrightarrow{g} Z) \longrightarrow H(X \xrightarrow{g \cdot f} Z)$$

и

$$IH(X) \times IH(X) \longrightarrow IH(X).$$

Ни одна из них не является гомотопически инвариантной.

Геометрически классы гомологий особого пространства X представляются циклами в X, а классы когомологий в X – циклами, удовлетворяющими некоторому условию трансверсальности по отношению к особенностям пространства X (см. M. Goresky, Whitney stratified chains and cochains, Trans. Amer. Math. Soc., 1981, 267, 175–196). Грубо говоря, элементы бивариантной группы гомологий $H(X \to Y)$ интерпретируются как циклы на X, удовлетворяющие условиям трансверсальности по отношению к особенностям пространства Y. Элементы группы ГМ-гомологий $IH(X)$ интерпретируются геометрически как циклы, удовлетворяющие условию "полустрогой" трансверсальности (по сравнению с "полной" трансверсальностью).

К чему две разные теории? Они служат разным целям. Бивариантные гомологии содержат интересные специальные элементы (например, характеристические классы); они доставляют естественную область, в которой между этими элементами выполняются полезные соотношения (например, теорема Римана – Роха). ГМ-гомологии сами по себе обладают интересной структурой (например, для них имеются теоремы Кэлера), а их вычисление представляется еще более важным (например, ГМ-гомологии многообразий Шуберта играют значительную роль в теории представлений). Возможно ли единое обобщение этих двух теорий? Ничего не могу сказать на этот счет.

Остается еще много недоделанного, даже на уровне оснований. Например, нет конструкции бивариантной К-теории, использующей алгебры операторов; нет никакого аналога ГМ-гомологий для К-теории. Ни в одной из наших двух теорий нет аналога ни для гомотопических групп, ни для геометрической группы Чжоу. Много других нерешенных проблем приводится в тексте книги.

Роберт Мак-Фёрсон

ПРЕДИСЛОВИЕ
К АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящее время стало ясным, что традиционные методы гомологий и когомологий недостаточны для изучения ряда вопросов геометрии и топологии. Это наиболее отчетливо проявляется при рассмотрении пространств с особенностями. Многие простые результаты приходится доказывать сложным окольным путем, вводя гомоморфизмы Гизина и разнообразные произведения.

В этой книге развит новый формализм, который мы называем формализмом бивариантных теорий. Такие теории являются одновременно обобщением групповых гомологических ковариантных теорий и кольцевых когомологических контравариантных теорий, и фактически большинство традиционных пар ковариантных и контравариантных теорий (например, гомологии и когомологии, K-теория, алгебраическая K-теория и т.д.) можно расширить до бивариантных теорий. Бивариантная теория сопоставляет группу не объекту, а морфизму исходной категории. В ней определены произведения, согласованные со взятием композиции морфизмов.

Мы также определим преобразования из одной бивариантной теории в другую, названные нами преобразованиями Гротендика, которые служат обобщением обычных естественных преобразований. Оказывается, что целый ряд стандартных естественных преобразований (например квадраты Стинрода, преобразование Римана – Роха, преобразование двойственности Гротендика), продолжается до преобразований Гротендика. Существование такого продолжения во многих случаях влечет за собой весьма глубокие следствия.

Книга состоит из двух частей. Первая называется "Бивариантные теории", а вторая "Произведения в формуле Римана – Роха".

В ч. I сначала излагаются основные понятия и факты, касающиеся бивариантных теорий, а затем созданный аппарат применяется к разнообразным независимым ситуациям. Некоторые из этих приложений приводят к существенно новым результатам; например, мы развиваем новую теорию рациональной эквивалентности и пересечений на особых алгебраических многообразиях и доказываем новую комбинаторную формулу для классов Уитни. Другие приложения – это всего лишь переформулировки известных результатов, но и здесь бивариантный язык ведет к концептуальным упрощениям, или облегчает доказательство, или подсказывает новые формулы. К примерам такого рода относятся: когомологические операции, теорема Римана – Роха для дифференцируемых многообразий, число неподвижных точек, трансфер, двойственность Гротендика.

В ч. II некоторые из идей ч. I применяются для вывода теоремы Римана – Роха. Пожалуй, это важнейший пример полезности бивариантного языка. Этот язык позволяет сформулировать единую теорему Римана – Роха, которая содержит все ранее известные варианты теоремы Римана – Роха для особых многообразий как частные случаи. Кроме того, он доставляет нечто новое – богатый набор произведений, согласованных с преобразованием Римана – Роха.

У. Фултон, Р. Мак-Ферсон

ЧАСТЬ I

БИВАРИАНТНЫЕ ТЕОРИИ

Глава I

ВВЕДЕНИЕ

Эта глава представляет собой интуитивное введение в понятия и методы бивариантной теории. Обсуждаемые здесь примеры будут затем рассмотрены более подробно в этой части и в ч.II.

§ I.I. Бивариантные теории

Ввиду двойственности Пуанкаре, гомологии и когомологии многообразий можно объединить в одну теорию с тремя структурами:

I) произведения ($\cup$-произведения, или "пересечения");

2) взятие прямого образа (ковариантная функториальность);

3) взятие обратного образа (контравариантная функториальность).

Идея бивариантных теорий – в продолжении совокупности этих трех структур на пространства с особенностями.

I.I.I. Бивариантная теория на категории $\mathcal{C}$ со значениями в категории абелевых групп сопоставляет каждому морфизму

$$X \xrightarrow{f} Y$$

этой категории некоторую группу

$$T(X \xrightarrow{f} Y).$$

При работе с бивариантными диаграммами удобно обозначать элемент группы $T(X \xrightarrow{f} Y)$ символом в кружке вблизи стрелки $X \xrightarrow{f} Y$; так, например,

$X \xrightarrow[f]{\alpha} Y$ означает, что $\alpha \in T(X \to Y)$.

Бивариантная теория имеет все три возможные структуры, или операции:

1) Произведения. Для всех коммутативных треугольников и любых элементов α и β определено произведение $\alpha \cdot \beta$:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "\beta"] & \\ X \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\alpha\cdot\beta"'] & & Z \end{tikzcd}$$

2) Прямые образы. Для некоторого класса морфизмов f категории $\mathscr{C}$, называемых ограниченными[1] морфизмами, при любом α определен прямой образ $f_*(\alpha)$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Y \arrow[dl, "f_*\alpha"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

3) Обратные образы. Для некоторого класса коммутативных квадратов категории $\mathscr{C}$, называемых независимыми квадратами, при любом α определен обратный образ $g^*\alpha$:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "g^*\alpha"'] & X \arrow[d, "\alpha"] \\ Y' & Y \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

[1] В оригинале confined. — Прим. перев.

Эти операции должны удовлетворять некоторым естественным связывающим их условиям (см. § 2.2).

Из этих операций именно введение новых произведений, по-видимому, наиболее важно в приложениях.

I.1.2. Бивариантная теория T является обобщением пары функторов T^* и T_*, где T^* – контравариантный функтор со значениями в категории колец, а T_* – ковариантный функтор со значениями в категории групп. По бивариантной теории T можно определить функтор

$$T^*(X) = T(X \xrightarrow{id} X),$$

где id – тождественное отображение. Это так называемая ассоциированная контравариантная теория. Контравариантность этого функтора следует из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}", "f^*\alpha"'] & Y \arrow[d, "\mathrm{id}"', "\alpha"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

(при условии, что такие квадраты независимы), а кольцевую структуру на $T^*(X)$ задает диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dr, "\mathrm{id}"', "\beta"] & \\
X \arrow[ur, "\alpha", "\mathrm{id}"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}", "\alpha\cdot\beta"'] & & X
\end{tikzcd}$$

Группы $T_*(X)$ можно определить следующим способом:

$$T_*(X) = T(X \to pt),$$

где pt – финальный объект[1] категории $\mathscr{C}$. Это так называемая ассоциированная ковариантная теория. Ее ковариантность для

---

[1] В оригинале point object. Отсюда сокращение pt. Прим. ред.

ограниченных морфизмов f следует из диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Y \arrow[dl, "f_*\alpha"] \\ & pt & \end{tikzcd}$$

При этом $T_*(X)$ является $T^*(X)$ -модулем в силу диаграммы

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "\beta"] & \\ X \arrow[ur, "\alpha", "id"'] \arrow[rr, "\alpha\cdot\beta"'] & & pt \end{tikzcd}$$

Такие пары функторов достаточно хорошо известны. Покажем теперь, как некоторые из них продолжаются до бивариантных теорий.

I.I.3. Бивариантная теория гомологий определяется на категории не очень плохих топологических пространств (см. § 3). Любое отображение $f: X \to Y$ можно представить как композицию замкнутого вложения в прямое произведение $Y \times M$, где M – некоторое ориентированное многообразие, и проекции на Y :

$$\begin{tikzcd} & Y \times M \arrow[d] \\ X \arrow[ur, hook] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Положим

$$H(X \to Y) = H(Y \times M, Y \times M \setminus X).$$

Нетрудно проверить, что это определение корректно, т.е. не зависит от выбора разложения.

Проиллюстрируем построение бивариантных произведений в случае замкнутых вложений (когда в качестве M можно взять точку) Пусть дана диаграмма

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, hook, "\beta"] & \\ X \arrow[ur, hook, "\alpha"] \arrow[rr, hook] & & Z \end{tikzcd}$$

Выберем пару (N, A) подпространств в Z , такую что N — окрестность Y, $A \cap Y = Y \setminus X$ и α является ограничением элемента $\bar{\alpha} \in H^*(N, A)$ на $H^*(Y, Y\setminus X)$. Тогда, по определению, $\alpha \cdot \beta = \bar{\alpha} \smile \beta$, после соответствующих вырезаний. (Эта конструкция не зависит от выбора элемента $\bar{\alpha}$.)

Прямые образы (при собственных отображениях) и обратные образы (для расслоенных квадратов) строятся непосредственно, с использованием обычных функториальных свойств теории H^*.

Отметим, что для ориентированных многообразий X и Y , согласно двойственностям Александера и Пуанкаре, $H(X \to Y) = H^*(X) \cong H_*(X)$, а произведения, прямые образы и обратные образы совпадают с обычно определяемыми. Итак, в неособом случае бивариантные теории гомологий ничем не отличаются от обычных теорий. В общем случае $H(X \xrightarrow{f} Y)$ не является гомотопическим инвариантом отображения f . Например, если X — точка, а Y — восьмерка ("8"), то $H(f)$ зависит от того, отображает ли f пространство X в особую или неособую точку.

Когомологиями пространства X называется кольцо $H(X \xrightarrow{id} X)$, а гомологиями пространства X — группа $H(X \to pt)$. Как объяснялось выше для общей теории, бивариантное произведение задает $\smile$- и $\frown$-произведения. Кроме того, это произведение охватывает весь спектр топологических произведений, таких как внешние произведения в когомологиях и гомологиях и /-произведения (см. § 2.4).

Бивариантные гомологии имеют естественную градуировку: $H(X \to Y) = \oplus H^i(X \to Y)$, где $H^i(X \to Y) = H^{i+n}(Y\times M, Y\times M \setminus X)$, $n = \dim M$. Эта градуировка инвариантна относительно взятия прямых и обратных образов, а также аддитивна относительно произведений. При этом $H^i(X) = H^i(X \xrightarrow{id} X)$ и $H_i(X) = H^{-i}(X \to pt$

1.1.4. Одна из бивариантных теорий – это теория K_{alg}, для которой ассоциированный контравариантный (соответственно ковариантный) функтор сопоставляет алгебраическому многообразию X группу Гротендика $K^{\circ}_{alg}X$ (соотв. $K^{alg}_{\circ}X$) алгебраических векторных расслоений (соотв. когерентных пучков) на X. Группа $K_{alg}(X \xrightarrow{f} Y)$ является группой Гротендика f-совершенных комплексов $\mathcal{O}_X$-модулей (см. ч.II, § I.I). Эта группа была введена в [SGA-6]; там же доказаны все свойства, из которых вытекает, что K_{alg} – бивариантная теория. Хотя эти группы и не появляются в формулировке предложенной в [SGA-6] теоремы Римана – Роха, однако именно здесь, насколько нам известно, впервые появляется бивариантная теория.

1.1.5. Имеется также топологическая теория $\mathbf{F}(X \to Y)$, элементы которой представляют собой функции на X со значениями в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, удовлетворяющие некоторым условиям на локальную эйлерову характеристику (п. 6.1.2). Эта теория полезна при работе с классами Уитни.

В алгебраической геометрии имеется теория $A(X \to Y)$, элементами которой служат операции из группы Чжоу пространства Y' в группу Чжоу пространства X' для всех расслоенных квадратов

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

удовлетворяющие некоторым условиям согласованности. Эта теория полезна при изучении пересечений на алгебраических многообразиях

§ 1.2. Преобразования Гротендика

Большинство из употребляемых преобразований встречается парами – одно в когомологиях, а другое в гомологиях. Например, такую пару составляют квадраты Стинрода и операции Смита; другой пример – характер Черна и преобразование Римана – Роха. Это наводит на мысль, что такие пары преобразований можно продолжить до преобразований бивариантных теорий. Такие продолжения мы называем преобразованиями Гротендика.

1.2.1. Пусть T и U – бивариантные теории, заданные на категории $\mathscr{C}$. Преобразование Гротендика t из T в U – это попросту набор гомоморфизмов

$$T(X \to Y) \xrightarrow{t} U(X \to Y),$$

по одному преобразованию на каждый морфизм $X \to Y$ в $\mathscr{C}$, сохраняющих три операции: произведение, прямой образ и обратный образ.

Преобразование Гротендика t индуцирует обычные естественные преобразования t^* из T^* в U^* и t_* из T_* в U_*; значит, преобразование Гротендика служит продолжением пары обычных преобразований t^* и t_*.

1.2.2. ПРИМЕРЫ. Любая мультипликативная когомологическая операция продолжается до преобразования Гротендика бивариантной теории гомологий в себя (§ 4.2). Существует преобразование Римана – Роха из бивариантной алгебраической K-теории в гомологии (ПРР). Двойственность Серра преобразует алгебраическую K-теорию в себя (§ 7.2). Преобразование Уитни преобразует теорию $\mathbb{F}$ в $\mathrm{mod}\,2$-гомологии.

Одна из наших целей – показать, что существование преобразования Гротендика зачастую является глубоким результатом, из которого получаются интересные следствия, не всегда вытекающие из существования ассоциированных классических естественных преобразований.

§ 1.3. Ориентации и гомоморфизмы Гизина

Хорошо известно, что отображение многообразий $f: X \to Y$ и ориентация в стабильном нормальном расслоении отображения f индуцируют гомоморфизм Гизина в гомологиях, а если отображение f собственное, то и в когомологиях:

$$f^!: H_*(Y) \to H_*(X), \quad f_!: H^*(X) \to H^*(Y).$$

Для отображений $X \to Y$ даже особых пространств любой элемент θ из $H(X \xrightarrow{f} Y)$ также индуцирует гомоморфизмы Гизина, а поэтому любой такой элемент можно рассматривать как обобщенную ориентацию отображения f. Все эти факты находят отражение в любой бивариантной теории T.

Пусть θ – произвольный элемент из $T(X \xrightarrow{f} Y)$. Определим гомоморфизм Гизина

$$\theta^*: T_*(Y) \to T_*(X)$$

на ассоциированном ковариантном функторе при помощи диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\theta", "f"'] \arrow[dr, "\theta^* a = \theta\cdot a"'] & & Y \arrow[dl, "a"] \\ & pt & \end{tikzcd}$$

Аналогично для ограниченного отображения f гомоморфизм Гизина

$$\theta_*: T^*(X) \to T^*(Y)$$

на ассоциированном контравариантном функторе определим при помощи диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "a"', "\mathrm{id}"] \arrow[drr, "a\cdot\theta"] & & Y \arrow[d, "\mathrm{id}"', "f_* a\cdot\theta = \theta_* a"] \\ X \arrow[rr, "f", "\theta"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Конечно, гомоморфизмы Гизина θ^* и θ_* наиболее интересны, когда θ выбирается естественным образом. Существует ряд важных классов отображений f, для которых канонические элементы $\theta(f)$ из $T(X\to Y)$ автоматически определены. Эти элементы мы называем канонические ориентациями.

ПРИМЕРЫ. В алгебраической геометрии канонические ориентации существуют для морфизмов локально полного пересечения в бивариантных гомологиях (ч. II, § I.3), для отображений с конечной Tor -размерностью в алгебраической K-теории (ч. II, § I.2) и для плоских морфизмов и морфизмов локально-полного пересечения в теории рациональной эквивалентности (гл. 9). В топологии канонические ориентации определены для "нормально невырожденных" отображений в гомологиях (гл. 4) и для "эйлеровых отображений" в теории $\mathbb{F}$ (гл. 6).

В случае когда $\theta(f)$ - некоторая такая каноническая ориентация, мы пишем $\theta(f)_* = f_!$ и $\theta(f)^* = f^!$. Функториальность

этих отображений Гизина, т.е. тот факт, что $(fg)^! = g^! f^!$ и $(fg)_! = f_! g_!$, следует из формулы умножения $\theta(f) \cdot \theta(g) = \theta(fg)$. (Это равенство – одно из тех приложений бивариантного произведения, для которых классических произведений оказывается недостаточно.)

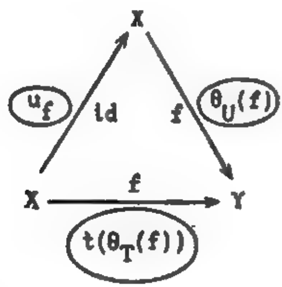
В гл. 5 мы строим трансфер Дольда в виде гомоморфизма Гизина, ассоциированного с канонически построенным элементом из бивариантной теории гомологий.

§ I.4. Формулы типа Римана – Роха

Пусть $t: T \to U$ – преобразование Гротендика бивариантных теорий. Отображение $f: X \to Y$ может одновременно иметь канонические ориентации $\theta_T(f)$ в $T(X \to Y)$ и $\theta_U(f)$ в $U(X \to Y)$. Тогда как $t(\theta_T(f))$, так и $\theta_U(f)$ – ориентации отображения f, а поэтому вполне естественно желание найти связывающую их формулу. Формулой Римана – Роха мы называем соотношение вида

$$t(\theta_T(f)) = u_f \cdot \theta_U(f),$$

где



Зачастую наше отображение f имеет виртуальное нормальное расслоение N_f, и u_f является характеристическим классом такого расслоения.

ПРИМЕРЫ. Для преобразования Римана – Роха множитель u_f совпадает с прообразом класса Тодда расслоения N_f (ч.II). Для преобразования Уитни u_f есть прообраз класса Уитни расслоения N_f (гл. 6). Для полного квадрата Стинрода u_f есть прообраз класса Уитни расслоения N_f (§ 4.2).

Используя общие свойства бивариантных теорий, с помощью формулы Римана – Роха можно сравнивать гомоморфизмы Гизина теорий T и U. Для когомологического гомоморфизма Гизина мы получаем коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} T^*X & \xrightarrow{t^\cdot} & U^*X \\ \downarrow{\scriptstyle f_!} & & \downarrow{\scriptstyle f_!(\ \cdot u_f)} \\ T^*Y & \xrightarrow[t^\cdot]{} & U^*Y \end{array}$$

Мы называем его SGA-6-формулой. Для гомологического гомоморфизма Гизина коммутативен квадрат

$$\begin{array}{ccc} T_*Y & \xrightarrow{t_\cdot} & U_*Y \\ \downarrow{\scriptstyle f^!} & & \downarrow{\scriptstyle u_f \cdot f^!(\ )} \\ T_*X & \xrightarrow[t_\cdot]{} & U_*X \end{array}$$

который мы назовем формулой Верлье. (Эти названия указывают на работы, в которых впервые появились такие формулы для пространств с особенностями, см. ч. II, § 1.1.)

§ 1.5. Один пример

В этом параграфе мы проиллюстрируем необходимость бивариантного языка на примере одной простой геометрической задачи для пространств с особенностями, не решаемой при помощи классических инвариантов.

Пусть $\pi: X \to Y$ – расслоение[1] одного неособого пространства над другим (с неособыми слоями F). Тогда класс Уитни многообразия X есть произведение класса Уитни слоя и класса

[1] В смысле Гуревича. – Прим. перев.

Уитни пространства Y, или, в когомологических обозначениях,

$$w(X) = w(TF) \smile w(Y),$$

где TF – расслоение на X касательных к слоям. Эта формула отражает мультипликативность полного класса Уитни ("двойственность Уитни").

Классы Уитни определены также для некоторых особых пространств, называемых $\mathrm{mod}\,2$ -пространствами Эйлера (см. [Su] и п. 6.2.2), но эти классы лежат в группах гомологий, а не когомологий. Наша задача – найти аналог вышеприведенной формулы для расслоений $\pi: X \to Y$ $\mathrm{mod}\,2$-пространств Эйлера.

Во-первых, надо найти подходящий глобальный класс, аналог класса $w(TF)$, ограничение которого на слой дает соответствующий класс Уитни. Если слои неособы, то класс $w(TF) \in H^*(X)$ все еще годится. Если база неособа, то в $H_*(X)$ может быть найден нужный глобальный класс ξ, ограничивающийся с помощью гомоморфизма Гизина на характеристический класс слоя. Но если слой и база особы, то ни гомологии, ни когомологии нас не удовлетворят. Однако $H(X \to Y)$ можно ограничить на гомологии любого слоя F с помощью g^*, поскольку квадрат

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
pt \arrow[r, hook, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

независим. Элемент группы $H(X \to Y)$ с нужным свойством нетрудно указать: это $\omega(1_\pi)$ (преобразование Уитни класса $\mathbf{F}$-ориентации отображения π, см. гл. 6).

Во-вторых, нужно найти подходящее произведение, задающее класс гомологий в X. Если слой неособ, то

$$w_*(X) = w(TF) \frown \pi^* w_*(Y),$$

где w_* – класс Уитни в гомологиях, а π^* – гомоморфизм Гизина. Если база неособа, то

$$w_*(X) = \pi^* w(Y) \frown \xi.$$

Если и слой, и база особы, но расслоение тривиально, то

$$w_*(X) = w_*(F) \times w_*(Y)$$

(как доказано в [HT_2]). На бивариантном языке эти три формулы обобщаются в единую формулу

$$w_*(X) = \omega(1_\pi) \cdot w_*(Y),$$

где

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "w_*(Y)"] & \\ X \arrow[ur, "\pi"', "\omega(1_\pi)"] \arrow[rr, "w_*(X)"'] & & pt \end{tikzcd}$$

эта формула годится для эйлеровых отображений – более широкого класса отображений, чем расслоения $mod\,2$-эйлеровых пространств (см. п. 6.2.2).

Всё обсуждавшееся здесь применимо и для классов Тодда. Надо просто заменить $\omega(1_\pi)$ на $\tau(\mathcal{O}_\pi)$, а эйлеровы отображения – на плоские отображения (см. ч.II).

§ 1.6. Путеводитель по ч.I

Содержание отдельных глав сильно различается как по важности и новизне, так и по излагаемому материалу. Поскольку лишь немногих читателей заинтересуют все разбираемые темы, то ввиду слабой зависимости между ними полезно сказать несколько слов о содержании работы в целом.

Гл. 2 содержит формальные определения бивариантной теории, ассоциированных с ней контравариантного и ковариантного функторов, отображений Гизина, ориентаций, преобразований Гротендика и т.д. На этих понятиях основано все последующее изложение.

В гл. 3 строятся бивариантные теории в топологии, соответствующие как обычным гомологиям и когомологиям, так и экстраординарным теориям гомологий. Всё это используется в гл. 4 – 6, а также в ч.II. Обсуждение специализации общего слоя к специальному в § 3.4 может оказаться полезным и в других контекстах. В гл.4 показано, как некоторые хорошо известные понятия топологии –

ориентирующие отображения, когомологические операции и преобразование Римана – Роха для гладких многообразий – принимают простую и отчетливую форму на бивариантном языке.

В гл. 5 описывается простой подход к изучению эквивариантного отображения переноса по Дольду. Основной результат состоит в том, что если $X \to Y$ – некоторое расслоение[1)] и существует отображение пространства X в себя, коммутирующее с проекцией на Y, то в $H^0(|X| \to Y)$ имеется канонический элемент; здесь $|X|$ обозначает множество неподвижных точек указанного отображения. Когомологические отображения Гизина, заданные этим элементом, и являются гомоморфизмами переноса по Дольду [Do_2]. Бивариантный язык приводит здесь к значительному упрощению и доказательств, и формулировок, а потому изложение дано с необходимыми подробностями.

В гл.6 развивается бивариантный подход к классам Уитни. Содержание этого параграфа геометрическое; например, приводится явное построение "бивариантного гомологического цикла" (§ 6.5). Этот материал формально соответствует материалу ч.II и может служить конкретным введением к ней. Результаты гл.6 новые, и из них получаются интересные следствия для классического случая – одна комбинаторная формула (п.6.6.I) и одно новое отображение переноса (п.6.6.2).

В § 7.I обсуждается двойственность Серра – Гротендика. Несмотря на то что она часто используется вместе с преобразованием Римана – Роха, поразительно, что ее также можно представлять как преобразование Гротендика бивариантных теорий. Излагаемые результаты не слишком далеки от уже известных по этому поводу, однако бивариантный подход позволяет выявить интересное взаимоотношение между двойственностью и преобразованием Римана Роха, приводящее к одной новой формуле (п.7.2.3). Другое полезное описание бивариантных гомологий в топологии дает формализм, аналогичный формализму двойственности Вердье (§ 7.3).

В гл.8 в стиле подхода Манина к изучению мотивов [Ma] описано, как ковариантный функтор задает бивариантную теорию. Это используется в гл.9 для развития бивариантной теории рациональной эквивалентности в алгебраической геометрии. Богатство бивариантной теории произведениями и отображениями Гизина делает ее язык идеальным для записи формул пересечения на многообразиях с особенностями.

---

1) В смысле Гуревича. – Прим.перев.

В заключительной гл.10 рассмотрены некоторые другие примеры бивариантных теорий, затрагивающие такие темы, как конечные группы, комплексные аналитические пространства, а также алгебраическую геометрию и топологию. Обсуждается также ряд нерешенных задач, что, как мы надеемся, побудит специалистов в соответствующих областях заняться ими.

Ни один формализм не может доказывать теоремы или делать трудную математику легкой. Однако формализм может быть мощным организующим инструментом, который позволяет ставить интересные вопросы, объединять разрозненные результаты, делать доказательства эффективными и прояснять идеи. Мы надеемся, что введенный здесь бивариантный язык является простым и естественным формализмом, в достаточной степени удовлетворяющим этим требованиям.

§ I.7. Благодарности

Своим появлением эта книга обязана многим, работавшим над проблемой Римана – Роха, в особенности Ф.Хирцебруху, А.Гротендику, М.Ф. Атье, Л. Иллюзи и Ж.-Л. Вердье, или думавшим об общей форме теоремы Римана – Роха, в частности А. Дольду, Э. Дайеру и Д. Квиллену. Особое влияние оказали на нас наши соавторы по предыдущим работам – П. Баум, М. Горески и Г. Кварт. Мы признательны также за полезные обсуждения Д. Айзенбаду, Б. Иверсену, С. Клейману, К. Мак-Крори, Дж. Сторяву и Ж.-Л. Вердье.

Наш долг отметить решающее влияние А. Гротендика. Именно он подчеркнул преимущество обобщения пространств отображениями всюду, где только возможно, а также первым осознал силу интерпретации формулы Римана – Роха как естественного преобразования функторов. Вот почему мы назвали преобразования бивариантных теорий преобразованиями Гротендика.

Мы хотели бы поблагодарить Институт высших научных исследований в Париже, Орхусский университет и Университет Тромсё, гостями которых мы были в период работы над данной книгой. Кроме того, мы признательны Элейн Хейст за квалифицированную подготовку рукописи.

Глава 2

БИВАРИАНТНЫЕ ТЕОРИИ

§ 2.1. Низлежащая категория

Бивариантная теория определяется на категории $\mathscr{C}$, в которой выделены:

1) класс морфизмов в $\mathscr{C}$, называемых ограниченными морфизмами;

2) класс коммутативных квадратов, называемых независимыми квадратами:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Эти классы должны удовлетворять следующим аксиомам:

(A1) Все тождественные морфизмы ограниченны.

(A2) Композиция ограниченных морфизмов ограничена.

(B1) Любой квадрат вида

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "id"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "id"] & Y \end{tikzcd}$$

независим.

(B2) Если два внутренних квадрата в диаграммах

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "f''"] & X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y'' \arrow[r, "h"'] & Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X' \arrow[r, "h''"'] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "h'"'] \arrow[d, "g'"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ Z' \arrow[r, "h"'] & Z \end{tikzcd}$$

независимы, то и соответствующий внешний квадрат тоже независим.

(C) Для любого квадрата (*) из ограниченности f (соотв. g) следует ограниченность f' (соотв. g').

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Квадрат (*) считается "ориентированным" – важно отличать квадрат (*) от транспонированного квадрата

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & Y' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} \qquad (*')$$

хотя обычно квадраты (*) и (*') независимы одновременно.

2. Для простоты мы будем предполагать, что в любом независимом квадрате (*) объект X' является расслоенным произведени-

ем объектов X и Y' над Y. Мы также предполагаем, что в категории $\mathcal{C}$ имеется финальный объект, обозначаемый pt.

3. Морфизмы $g : X' \to X$, для которых квадрат

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "id"'] & X \arrow[d, "id"] \\ X' \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

независим, составляют класс коограниченных морфизмов. Этот класс замкнут относительно взятия композиции. Если не оговорено противное (как, например, в § 3.3), то мы считаем все морфизмы коограниченными.

§ 2.2. Аксиомы бивариантной теории

Бивариантная теория T на категории $\mathcal{C}$ сопоставляет каждому морфизму $f : X \to Y$ категории $\mathcal{C}$ градуированную абелеву группу

$$T(X \xrightarrow{f} Y).$$

Компонента в размерности i, $i \in \mathbb{Z}$, обозначается через $T^i(X \xrightarrow{f} Y)$. Используются также краткие формы записи $T(X \to Y)$ и $T(f)$. Как уже отмечалось в § 1.1, символ в кружке вблизи стрелки в коммутативной диаграмме обозначает элемент соответствующей группы. В бивариантной теории должны быть заданы три операции:

1) Произведение. Для любых $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ определены гомоморфизмы

$$T^i(X \to Y) \otimes T^j(Y \xrightarrow{g} Z) \xrightarrow{\cdot} T^{i+j}(X \xrightarrow{gf} Z).$$

2) Взятие прямого образа. Для любого $g : Y \to Z$ и любого ограниченного $f : X \to Y$ определены гомоморфизмы

$$f_* : T^i(X \xrightarrow{gf} Z) \longrightarrow T^i(Y \xrightarrow{g} Z).$$

3) Взятие обратного образа. Для любого независимого квадрата (∗) определены гомоморфизмы

$$g^* : T^i(X \xrightarrow{f} Y) \longrightarrow T^i(X' \xrightarrow{f'} Y').$$

Взаимосвязи между этими тремя операциями устанавливаются следующими семью аксиомами.

(A1) Произведение ассоциативно: для любой диаграммы

$$X \xrightarrow[\alpha]{f} Y \xrightarrow[\beta]{g} Z \xrightarrow[\gamma]{h} W$$

имеем

$$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$$

в $T(hgf)$.

(A2) Взятие прямого образа ковариантно: для любой диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rrr, bend right, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & W \end{tikzcd}$$

где f и g ограниченны,

$$(gf)_*(\alpha)=g_*f_*(\alpha)$$

в $T(h)$.

(A3) Взятие обратного образа контравариантно: для любой диаграммы

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "f''"'] & X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"', "\alpha"] \\ Y'' \arrow[r, "h"'] & Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

с независимыми квадратами

$$(gh)^*(\alpha)=h^*g^*(\alpha)$$

в $T(f'')$.

(A12) Операции взятия произведения и прямого образа коммутируют: для любой диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\alpha"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h", "\beta"'] & W \end{tikzcd}$$

где f ограниченно,

$$f_*(\alpha \cdot \beta) = f_*(\alpha) \cdot \beta$$

в $T(hg)$.

(A13) Операции взятия произведения и обратного образа коммутируют: для любой диаграммы

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "h''"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"', "\alpha"] \\
Y' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "g'"'] & Y \arrow[d, "g"', "\beta"] \\
Z' \arrow[r, "h"] & Z
\end{tikzcd}$$

с независимыми квадратами

$$h^*(\alpha \cdot \beta) = h'^*(\alpha) \cdot h^*(\beta)$$

в $T(g' f')$.

(A23) Операции взятия прямого и обратного образов коммутируют: для любой диаграммы

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "h''"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend left=60, "\alpha"] \\
Y' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "g'"'] & Y \arrow[d, "g"'] \\
Z' \arrow[r, "h"] & Z
\end{tikzcd}$$

с независимыми квадратами и ограниченным f

$$f'_*(h^*\alpha) = h^* f(\alpha)$$

в $T(g')$.

(AI23) <u>Естественность</u>. Для любой данной диаграммы

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"'] \arrow[d, phantom, shift left=3, "\alpha"] & \\ Y' \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "\beta"'] & Y \arrow[r, "h"] & Z \end{tikzcd}$$

с независимыми квадратами и ограниченным g

$$g'_*(g^*\alpha\cdot\beta)=\alpha\cdot g_*(\beta)$$

в $T(hf)$.

Мы будем также предполагать, что в теории T <u>имеются единицы</u>, т.е. существует элемент $1_X\in T^0(X\xrightarrow{id}X)$, такой что: $\alpha\cdot 1_X=\alpha$ для всех морфизмов $W\to X$ и всех $\alpha\in T(W\to X)$; $1_X\cdot\beta=\beta$ для всех морфизмов $X\to Y$ и всех $\beta\in T(X\to Y)$; $g^*(1_X)=1_{X'}$ для всех $g: X'\to X$.

Будем называть теорию T <u>кососкоммутативной</u> (соотв. <u>коммутативной</u>), если для всех независимых квадратов

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"'] \arrow[d, phantom, shift left=3, "\alpha"] \\ Y \arrow[r, "g", "\beta"'] & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & Y \arrow[d, "g"'] \arrow[d, phantom, shift left=3, "\beta"] \\ X \arrow[r, "f", "\alpha"'] & Z \end{tikzcd}$$

в $T(W\to X)$ выполняется равенство

$$g^*(\alpha)\beta=(-1)^{deg(\alpha)\,deg(\beta)}f^*(\beta)\cdot\alpha$$

(соотв. равенство $g^*(\alpha)\cdot\beta=f^*(\beta)\cdot\alpha$). Все рассматриваемые в данной работе бивариантные теории либо кососкоммутативны, либо коммутативны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Определение бивариантной теории со значениями в произвольной категории, отличной от категории абелевых групп, по существу совпадает с приведенным выше определением. Пример бивариантных теорий со значениями в категории множеств приведен в § 4.3, а со значениями в производных категориях – в гл.7.

§ 2.3. Ассоциированные контравариантный и ковариантный функторы

Пусть T – бивариантная теория. Определим ассоциированные контравариантные группы $T^i(X)$, полагая

$$T^i(X) = T^i(X \xrightarrow{id} X).$$

$\cup$-произведение

$$T^i(X) \otimes T^j(X) \xrightarrow{\cup} T^{i+j}(X)$$

есть произведение, заданное диаграммой $X \xrightarrow{id} X \xrightarrow{id} X$.

Гомоморфизмы взятия обратного образа

$$f^*: T^i(X) \to T^i(X')$$

определены для всех морфизмов $f: X' \to X$, ввиду независимости квадрата

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id"'] & X \arrow[d, "id"] \\ X' \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Из аксиом A1, A3 и A13 вытекает, что соответствие $X \mapsto T^*X$ является контравариантным функтором со значениями в категории колец.

Определим ассоциированные ковариантные группы $T_i(X)$, полагая

$$T_i(X) = T^{-i}(X \to pt).$$

$\frown$-произведение

$$T^i(X) \otimes T_j(X) \xrightarrow{\frown} T_{j-i}(X)$$

есть произведение, заданное диаграммой $X \xrightarrow{id} X \longrightarrow pt$.

Для ограниченных морфизмов $f: X' \to X$ диаграмма $X \xrightarrow{id} X \to pt$

определяет ковариантные гомоморфизмы

$$f_*\colon T_i(X') \to T_i(X).$$

$\frown$-произведение превращает $T_*(X)$ в $T^*(X)$-модуль; из аксиомы A123 вытекает формула естественности:

$$f_*(f^*(b) \frown a) = b \frown f_*(a)$$

для любого ограниченного $f\colon X' \to X$ и любых $b \in T^*(X)$, $a \in T_*(X')$.

§ 2.4. Внешние произведения

Предположим, что все диаграммы декартовых произведений

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & pt \end{tikzcd}$$

являются независимыми квадратами.

Внешние произведения

$$T^i(X_1 \xrightarrow{f} X_2) \otimes T^j(Y_1 \xrightarrow{g} Y_2) \xrightarrow{\times} T^{i+j}(X_1 \times Y_1 \xrightarrow{f \times g} X_2 \times Y_2)$$

определяются формулой $\alpha \times \beta = p^*(\alpha) \cdot \bar{q}^*(\beta)$, где $p\colon X_2 \times Y_1 \to X_2$, $\bar{q}\colon X_2 \times Y_2 \to Y_2$ — проекции. Если теория T кососкоммутативна, то имеется эквивалентное определение $\alpha \times \beta = (-1)^{i \cdot j} q^*(\beta) \cdot \bar{p}^*(\alpha)$, где $\bar{p}\colon X_2 \times Y_2 \to X_2$, $q\colon X_1 \times Y_2 \to Y_2$ — проекции. В случае когда $X_2 = Y_2 = pt$ или f и g — тождественные морфизмы, получаются внешние произведения на ковариантных и контравариантных группах.

/-произведения

$$T^i(X_1 \times Y \xrightarrow{f \times id} X_2 \times Y) \otimes T_j(Y) \xrightarrow{/} T^{i-j}(X_1 \xrightarrow{f} X_2)$$

определяются на ограниченных морфизмах $Y \to pt$ по формуле $\alpha / \beta = p_*(\alpha \cdot q^*(\beta))$, где p — проекция из $X_1 \times Y$ на X_1, а q — морфизм из X_2 в pt. В случае $f = id$ получается обычное /-произведение

$$T^i(X \times Y) \otimes T_j(Y) \xrightarrow{/} T^{i-j}(X).$$

Из аксиом бивариантной теории вытекает, что справедливы обычные формулы, связывающие эти операции между собой и с операциями взятия прямого и обратного образов.

§ 2.5. Гомоморфизмы Гизина

Любой элемент θ из $T^i(X \xrightarrow{f} Y)$ задает гомоморфизмы Гизина

$$\theta^*: T_j(Y) \to T_{j-i}(X), \tag{1}$$
$$\theta_*: T^j(X) \to T^{j+i}(Y); \tag{2}$$

в формуле (2) предполагается, что морфизм f ограниченный. Эти гомоморфизмы определяются формулами

$$\theta^*(a) = \theta \cdot a \qquad \text{для} \qquad a \in T_j(Y) = T^{-j}(Y \to pt),$$

$$\theta_*(b) = f_*(b \cdot \theta) \qquad \text{для} \qquad b \in T^j(X) = T^j(X \xrightarrow{id} X).$$

Перечислим некоторые важные свойства отображений Гизина. Все эти свойства следуют из аксиом бивариантной теории. Если в формулах присутствует f_* или θ_*, где $\theta \in T(f)$, то f считается ограниченным.

(G1) Функториальность. Пусть $\varphi \in T(X \xrightarrow{f} Y)$, $\psi \in T(Y \xrightarrow{g} Z)$. Тогда

$$(i)\ (\varphi \cdot \psi)^*(a) = \varphi^* \psi^*(a) \text{ для } \quad a \in T_*(Z),$$
$$(ii)\ (\varphi \cdot \psi)_*(b) = \psi_* \varphi_*(b) \text{ для } \quad b \in T^*(X).$$

(G2) Коммутирование со взятием обратного образа. Пусть

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

— независимый квадрат, $\theta \in T(X \xrightarrow{f} Y)$, $\theta' = g^*(\theta) \in T(X' \xrightarrow{f'} Y')$. Тогда

$$(i) \qquad g'_*(\theta'^*(a)) = \theta^*(g_*(a)) \quad \text{для} \quad a \in T_*(Y'),$$
$$(ii) \qquad \theta'_*(g'^*(b)) = g^*(\theta_*(b)) \quad \text{для} \quad b \in T^*(X).$$

(G3) Коммутирование со взятием прямого образа. Для любой заданной диаграммы $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ и любых элементов $\theta \in T(X \xrightarrow{gf} Z)$ и $\eta = f_*(\theta) \in T(Y \xrightarrow{g} Z)$

(i) $\eta^*(a) = f_*(\theta^*(a))$ для $a \in T_*(Z)$,

(ii) $\eta_*(b) = \theta_*(f^*(b))$ для $b \in T^*(Y)$.

(G4) Пусть $\theta \in T(X \xrightarrow{f} Y)$. Тогда

(i) $\theta_*(f^*(b) \smile a) = b \smile \theta_*(a)$ для $b \in T^*(Y), a \in T^*(X)$,

(ii) $f_*(b \frown \theta^*(a)) = \theta_*(b) \frown a$ для $b \in T^*(X), a \in T_*(Y)$,

(iii) $\theta^*(b \frown a) = (-1)^{\deg(\theta)\deg(b)} f^*(b) \frown \theta^*(a)$

для $b \in T^*(Y), a \in T_*(Y)$; в последней формуле теория T предполагается кососкоммутативной.

§ 2.6. Ориентации

Из предыдущего ясно, в каком смысле произвольный элемент группы $T(X \xrightarrow{f} Y)$ можно считать обобщенной ориентацией морфизма f.

2.6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элемент θ из $T(X \xrightarrow{f} Y)$ называется сильной ориентацией морфизма f, если для всех морфизмов $h: W \to X$ гомоморфизмы

$$T(W \xrightarrow{h} X) \xrightarrow{\cdot\theta} T(W \xrightarrow{fh} Y)$$

являются изоморфизмами. Скажем, что θ имеет коразмерность d, или размерность $-d$, если $\theta \in T^d(X \xrightarrow{f} Y)$.

Для любой диаграммы $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ и любых сильных ориентаций φ и ψ морфизмов f и g соответственно элемент $\varphi \cdot \psi$ является сильной ориентацией морфизма gf.

Будем говорить, что морфизм f сильно ориентируем, если для него существует сильная ориентация. Из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dd, shift right, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "f", "\theta"'] & \\
& Y \\
X \arrow[uu, shift right, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, "f"', "\theta'"] &
\end{tikzcd}$$

очевидно, что любые две сильные ориентации θ и θ' морфизма f связаны соотношением $\theta' = u \cdot \theta$, где u — некоторый обратимый элемент из $T^*(X)$. Поэтому сильные ориентации морфизма f

образуют главное однородное пространство над обратимыми элементами в $T^*(X)$.

ПРИМЕРЫ. Примеры из топологии – проекции локально-тривиальных расслоений и сечения векторных расслоений, имеющие классы Тома (см. гл.4). Гладкие морфизмы в алгебраической геометрии обладают сильными ориентациями в алгебраической K–теории и в теории рациональной эквивалентности (см. ч.II и гл.9).

2.6.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{S}$ – класс морфизмов категории $\mathcal{C}$, замкнутый относительно взятия композиций и содержащий все тождественные морфизмы. Предположим, что каждому морфизму $f: X \to Y$ из $\mathcal{S}$ сопоставляется элемент $\theta(f)$ из $T(X \xrightarrow{f} Y)$, удовлетворяющий условиям

$$(i)\ \theta(gf) = \theta(f)\cdot\theta(g) \qquad \text{для } f: X \to Y, g: Y \to Z \text{ из } \mathcal{S},$$

$$(ii)\ \theta(id_X) = 1_X \qquad \text{для всех } X.$$

Это сопоставление задает канонические ориентации морфизмов из $\mathcal{S}$. Если такие канонические ориентации выделены, то для гомоморфизмов Гизина можно использовать следующую запись:

$$f^!: T_*(Y) \to T_*(X),\ f^! = \theta(f)^*,$$
$$f_!: T^*(X) \to T^*(Y),\ f_! = \theta(f)_* \qquad (f \text{ ограниченно}).$$

Это сопоставление функториально: $(gf)^! = f^! g^!$, $(gf)_! = g_! f_!$ для отображений, допускающих композицию в $\mathcal{S}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для произвольного независимого квадрата

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

где f и f' – морфизмы из $\mathcal{S}$, соотношение $g^*\theta(f) = \theta(f')$ может и не выполняться. Аналогично если $f: X \to Y$ – ограниченный морфизм, а $g: Y \to Z$ и gf лежат в $\mathcal{S}$, то формула $f_*\theta(gf) = \theta(g)$ справедлива лишь в специальных случаях. Определить, в каких случаях эти соотношения выполняются, или же найти

формулы, связывающие канонические ориентации в случае, когда эти соотношения не выполняются, зачастую является важнейшей задачей.

ПРИМЕРЫ. В алгебраической K-теории множеством $\mathcal{S}$ служит класс морфизмов $f: X \to Y$ конечной Tor-размерности, а $\theta(f)$ представляется структурным пучком $\mathcal{O}_X$. В этом случае $g^*\theta(f) = \theta(f')$ для любого Tor-независимого квадрата, а $f_*\theta(gf) = \theta(g)$, если $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ и $R^i f_*\mathcal{O}_X = 0$ при $i > 0$. В теории рациональной эквивалентности множеством $\mathcal{S}$ является класс морфизмов локально-полного пересечения, и $g^*\theta(f)$ и $\theta(f')$ связаны формулой избытка пересечения (гл.9).

§ 2.7. Преобразования Гротендика

Пусть $\mathcal{C}$ и $\bar{\mathcal{C}}$ – категории, в которых выделены классы ограниченных морфизмов и независимых квадратов, удовлетворяющие условиям § 2.1. Предположим, что имеется функтор из $\mathcal{C}$ в $\bar{\mathcal{C}}$, преобразующий ограниченные морфизмы категории $\mathcal{C}$ в ограниченные морфизмы категории $\bar{\mathcal{C}}$, независимые квадраты категории $\mathcal{C}$ в независимые квадраты категории $\bar{\mathcal{C}}$ и финальный объект категории $\mathcal{C}$ в финальный объект категории $\bar{\mathcal{C}}$. Обозначим через $\bar{X}$ (соотв. через $\bar{f}$) образ в $\bar{\mathcal{C}}$ объекта X (соотв. морфизма f) из $\mathcal{C}$.

Пусть T – бивариантная теория на $\mathcal{C}$, а U – бивариантная теория на $\bar{\mathcal{C}}$.

2.7.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Преобразованием Гротендика

$$t: T \to U$$

называется набор гомоморфизмов

$$T(X \xrightarrow{f} Y) \xrightarrow{t} U(\bar{X} \xrightarrow{\bar{f}} \bar{Y}),$$

по одному гомоморфизму на каждый морфизм $f: X \to Y$ из $\mathcal{C}$, коммутирующих со взятием произведений, прямых образов и обратных образов. Отметим, что t может не сохранять градуировку.

Преобразование Гротендика всегда коммутирует и с остальными операциями, построенными по бивариантным теориям (см. §§ 2.3, 2.4). В частности, t индуцирует для всякого X гомоморфизмы

$$t^*: T^*(X) \to U^*(\bar{X}) \quad \text{и} \quad t_*: T_*(X) \to U_*(\bar{X})$$

– естественные преобразования контравариантных функторов со значениями в категории колец и ковариантных функторов. Эти преоб-

разования связаны <u>модульным свойством</u>

$$t_*(b \frown a) = t^*(b) \frown t_*(a),$$

где $b \in T^*(X)$, $a \in T_*(X)$. Аналогично

$$t_*(a \times b) = t_*(a) \times t_*(b),$$

где $a \in T_*(X)$, $b \in T_*(Y)$.

Если θ – элемент из $T(X \xrightarrow{f} Y)$, то $t(\theta)$ принадлежит $U(\bar{X} \xrightarrow{f} Y)$ и, следовательно, определяет гомоморфизмы Гизина $U^*(\bar{X}) \to U^*(\bar{Y})$ и $U_*(\bar{Y}) \to U_*(\bar{X})$. (Отметим, что такие гомоморфизмы Гизина <u>невозможно</u> получить из одних только преобразований t^* и t_*.) В этом случае диаграммы

$$\begin{tikzcd} T^*X \arrow[r, "t^*"] \arrow[d, "\theta_*"'] & U^*\bar{X} \arrow[d, "t(\theta)_*"] \\ T^*Y \arrow[r, "t^*"] & U^*\bar{Y} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_*Y \arrow[r, "t_*"] \arrow[d, "\theta^*"'] & U_*\bar{Y} \arrow[d, "t(\theta)^*"] \\ T_*X \arrow[r, "t_*"] & U_*\bar{X} \end{tikzcd}$$

всегда коммутативны.

<u>2.7.2.</u> Пусть морфизм $f: X \to Y$ имеет каноническую ориентацию $\theta_T(f)$, а морфизм $\bar{f}: \bar{X} \to \bar{Y}$ – каноническую ориентацию $\theta_U(\bar{f})$. <u>Формулой Римана – Роха</u> будем называть всякую формулу вида

$$t(\theta_T(f)) = u_f \cdot \theta_U(\bar{f}),$$

где $u_f \in U^*(\bar{X})$. (Если $\theta_U(\bar{f})$ – сильная ориентация, то такой класс u_f существует и единствен.) В обозначениях § 2.6 предыдущие диаграммы, согласно свойству $(G1)$ из § 2.5, принимают знакомый вид:

"SGA-6":
$$\begin{tikzcd} T^*X \arrow[r, "t^*"] \arrow[d, "f_!"'] & U^*\bar{X} \arrow[d, "\bar{f}_!(\ \cdot u_f)"] \\ T^*Y \arrow[r, "t^*"] & U^*\bar{Y} \end{tikzcd}$$

"Верлье":
$$
\begin{tikzcd}
T_*Y \arrow[r, "t_*"] \arrow[d, "f^!"'] & U_*Y \arrow[d, "u_f \cdot f^!"] \\
T_*X \arrow[r, "t_*"] & U_*\overline{X}
\end{tikzcd}
$$

(Происхождение этих названий объяснено во введении к ч. II). Итак, одно преобразование Гротендика бивариантных теорий объединяет целый набор результатов, известных как "теоремы Римана – Роха" в различных контекстах.

Глава 3

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ

§ 3.1. Построение бивариантной теории по теории когомологий

В этом параграфе мы опишем, как по произвольной теории когомологий h^* на категории топологических пространств построить бивариантную теорию h в смысле гл.2. Поскольку эти бивариантные теории используются в ряде следующих глав, а также в ч.II, мы проведем построение со всеми техническими подробностями.

3.1.1. Предполагается, что каждое из рассматриваемых в этой главе пространств допускает замкнутое вложение (т.е. может быть вложено как замкнутое подпространство) в некоторое евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. В качестве подчиняющей категории возьмем категорию $\mathcal{C}$ таких пространств и их непрерывных отображений. Ограниченными морфизмами будем считать собственные отображения (т.е. такие отображения, для которых прообраз всякого компактного множества снова компактен), а независимыми квадратами – расслоенные квадраты (т.е. в диаграмме (*) из § 2.1 пространство X' отображается гомеоморфно на пространство $\{(y', x) \in Y' \times X \mid g(y') = f(x)\}$).

3.1.2. Пусть h^* – мультипликативная теория когомологий. Нам достаточно, чтобы теория h^* задавала контравариантный функтор из категории пар пространств (X, A), где A открыто в X, и гомотопических классов отображений в категорию градуированных абелевых групп. Мы требуем, чтобы выполнялась аксиома вырезания (ограничение когомологий $h^*(X, A)$ на группу $h^*(X \setminus V, A \setminus V)$

является изоморфизмом, если замыкание V содержится в A) и существовали внешние произведения

$$h^i(X,A)\times h^j(Y,B)\xrightarrow{\times} h^{i+j}(X\times Y, X\times B\cup A\times Y),$$

контравариантные, ассоциативные и кососкоммутативные, с единицей $1\in h^*(pt)$. Мы также требуем существования такого элемента $\gamma=\gamma_h$ из $h^1(\mathbb{R},\mathbb{R}\setminus\{0\})$, чтобы для любого замкнутого ограниченного интервала I, содержащего $\{0\}$, $\times$-произведение на элемент $\bar\gamma$ – ограничение γ на $h^1(\mathbb{R},\mathbb{R}\setminus I)$ – было изоморфизмом. Обозначим через $\bar\gamma^n$ произведение $\bar\gamma\times\ldots\times\bar\gamma$ в $h^n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus I^n)$. Тогда гомоморфизмы

$$h^i(X,A)\xrightarrow{\times\bar\gamma^n} h^{i+n}(X\times\mathbb{R}^n, X\times(\mathbb{R}^n\setminus I^n)\cup A\times\mathbb{R}^n)$$

для всех (X,A), i и n являются изоморфизмами. Обычные внутренние ($\smile$-)произведения

$$h^i(X,A)\times h^j(X,B)\xrightarrow{\smile} h^{i+j}(X,A\cup B)$$

получаются как композиции внешних произведений с гомоморфизмом, индуцированным диагональным отображением из X в $X\times X$.

Если $A\subset X\subset Z$, A открыто в X, а X замкнуто в Z, то мы требуем также, чтобы

$$h^*(X,A)=\varinjlim h^*(U,V),$$

где предел берется по всем открытым окрестностям (U,V) пары (X,A) в Z.

3.1.3. Любую мультипликативную теорию когомологий h^*, заданную на конечномерных полиэдральных парах (см. [Dy]), можно распространить на введенные выше пары (X,A) при помощи процедуры Чеха (ср. [ES, LR, Do$_1$]). Для всякого открытого покрытия $\mathcal{U}$ пространства X обозначим через $N_X\mathcal{U}$ нерв покрытия $\mathcal{U}$, а через $N_A\mathcal{U}$ – подкомплекс, составленный из симплексов, вершины которых соответствуют элементам U из $\mathcal{U}$, содержащимся в A. Положим

$$h^i(X,A)=\varinjlim_{\mathcal{U}} h^i(N_X\mathcal{U},N_A\mathcal{U}).$$

Наиболее интересными для нас примерами служат: обычные когомологии H^*, комплексная K-теория K^* и вещественная

K-теория KO^*. Любой мультипликативный спектр E задает мультипликативную теорию когомологий E^*.

Если X – полиэдр, а C – замкнутый подполиэдр в X, являющийся деформационным ретрактом пространства A, то $h^*(X,A) = h^*(X,C)$; поэтому для таких пар нет надобности в процедуре Чеха.

Для евклидовых окрестностных ретрактов когомологии Чеха H^* совпадают с сингулярными когомологиями (см. $[Do_1]$).

Если h^* – мультипликативная теория когомологий, обладающая перечисленными выше свойствами, то для любого фиксированного $k>0$ группы $\bar{h}^i(X,A)=h^{ki}(X,A)$ обладают теми же свойствами, за исключением того, что умножение на $\bar{\gamma}^n$ возможно только при n, кратных k; при четных k умножение коммутативно. Пример: четная часть комплексной K-теории допускает прямое описание в терминах комплексов векторных расслоений на X, точных на A (см. ч.II, п.2.2.2).

3.1.4. Для любого отображения $f: X \to Y$ существует отображение $\varphi: X \to \mathbb{R}^n$, такое что $(f,\varphi): X \to Y \times \mathbb{R}^n$ есть замкнутое вложение (причем в качестве φ тоже можно взять замкнутое вложение). Выбор такого φ определяет разложение отображения f в композицию замкнутого вложения (f,φ) и проекции из $Y\times\mathbb{R}^n$ на Y. Обозначим образ X в $Y\times\mathbb{R}^n$ через X_φ; в случае когда не может возникнуть недоразумений, мы пишем вместо X_φ просто X. Положим

$$h^i(X \xrightarrow{f} Y) = h^{i+n}(Y\times\mathbb{R}^n, Y\times\mathbb{R}^n \setminus X_\varphi).$$

3.1.5. Прежде всего необходимо показать, что это определение не зависит от выбора отображения φ. Рассмотрим какое-нибудь другое разложение $\psi: X \to \mathbb{R}^m$ отображения f. По теореме Титце о продолжении существует отображение $\tilde{\psi}$ из $Y\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, такое что $\tilde{\psi}\circ(f,\varphi)=\psi$. Зададим гомеоморфизм θ пространства $Y\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ в себя по формуле

$$\theta(y,v,w) = (y,v,w-\tilde{\psi}(y,v)).$$

Ясно, что $\theta(X_{(\varphi,\psi)}) = X_{(\varphi,0)}$ и потому θ индуцирует изоморфизм θ^* из

$$h^{i+n+m}(Y\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m, Y\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \setminus X_{(\varphi,0)})$$

на
$$h^{i+n+m}(Y\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m, Y\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\setminus X_{(\varphi,\psi)}).$$
Если $\tilde\psi'$ – другое продолжение отображения ψ, то формула
$$\theta_t(y,v,w)=(y,v,w-t\tilde\psi(y,v)-(1-t)\tilde\psi'(y,v))$$
задает гомотопию, связывающую эти продолжения. Поэтому θ^* не зависит от выбора отображения $\tilde\psi$. Отображение $a\longmapsto\theta^*(a\times\tilde\gamma^m)$ задает изоморфизм
$$h^{i+n}(Y\times\mathbb{R}^n, Y\times\mathbb{R}^n\setminus X_\varphi)\xrightarrow{\approx}h^{i+n+m}(Y\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m, Y\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\setminus X_{(\varphi,\psi)}).$$

Нужный канонический изоморфизм из $h^{i+n}(Y\times\mathbb{R}^n, Y\times\mathbb{R}^n\setminus X_\varphi)$ в $h^{i+m}(Y\times\mathbb{R}^m, Y\times\mathbb{R}^m\setminus X_\psi)$ получается как композиция изоморфизмов в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
h^{i+n}(Y\times\mathbb{R}^n, Y\times\mathbb{R}^n\setminus X_\varphi) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, dashed] & h^{i+n+m}(Y\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m, Y\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\setminus X_{(\varphi,\psi)}) \arrow[d, "(-1)^{nm}(\mathrm{id}_Y\times\tau)^*"] \\
h^{i+m}(Y\times\mathbb{R}^m, Y\times\mathbb{R}^m\setminus X_\psi) \arrow[r, "\approx"] & h^{i+m+n}(Y\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n, Y\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\setminus X_{(\psi,\varphi)})
\end{tikzcd}$$

Изоморфизм в верхней строке только что был описан; изоморфизм в нижней строке определяется точно так же, нужно только поменять ролями отображения φ и ψ. Гомеоморфизм τ из $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ переставляет сомножители. Легко проверить, что для $\varphi=\psi$ этот канонический изоморфизм совпадает с тождественным отображением и что канонические изоморфизмы, соответствующие трем разложениям отображения f, согласованы[1].

3.1.6. Обратный образ

$$g^*: h^i(X\xrightarrow{f}Y)\longrightarrow h^i(X'\xrightarrow{f'}Y')$$

---

[1] Если построенный канонический изоморфизм обозначить через $F_{\varphi,\psi}$, то выполнено соотношение $F_{\psi,\chi}F_{\varphi,\psi}=F_{\varphi\chi}$. – Прим. перев.

для расслоенного квадрата

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

определяется через разложение $\varphi : X \to \mathbb{R}^n$ отображения f. В этой ситуации $(f', \varphi g')$ осуществляет вложение X' в $Y' \times \mathbb{R}^n$, и обратный образ g^* определяется как контравариантное отображение

$$(g \times id)^* : h^{i+n}(Y \times \mathbb{R}^n, Y \times \mathbb{R}^n \setminus X_\varphi) \to h^{i+n}(Y' \times \mathbb{R}^n, Y' \times \mathbb{R}^n \setminus X'_{\varphi g'}).$$

<u>3.1.7.</u> Теперь определим <u>произведения</u>

$$h^i(X \xrightarrow{f} Y) \otimes h^j(Y \xrightarrow{g} Z) \xrightarrow{\cdot} h^{i+j}(X \xrightarrow{gf} Z).$$

Для замкнутых вложений $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ эти произведения суть гомоморфизмы

$$h^i(Y, Y \setminus X) \otimes h^j(Z, Z \setminus Y) \to h^{i+j}(Z, Z \setminus X). \qquad (1)$$

Для любой окрестности (U, V) пары $(Y, Y \setminus X)$ в Z, такой что $V \cap Y = Y \setminus X$, определено $\cup$-произведение

$$h^i(U, V) \times h^j(U, U \setminus Y) \to h^{i+j}(U, U \setminus X). \qquad (2)$$

Поскольку, согласно аксиоме вырезания, $h^*(U, U \setminus Y) = h^*(Z, Z \setminus Y)$ и $h^*(U, U \setminus X) = h^*(Z, Z \setminus X)$, произведение (1) получается из (2) переходом к прямому пределу.

Для произвольных отображений $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ выберем $\varphi : X \to \mathbb{R}^n$, $\psi : Y \to \mathbb{R}^m$, разлагающие эти отображения, и рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(f,\varphi)"] \arrow[dr, "f"'] & Y \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "j"] \arrow[d] & Z \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "p"] \\ & Y \arrow[r, "(g,\psi)"] \arrow[dr, "g"'] & Z \times \mathbb{R}^m \arrow[d] \\ & & Z \end{tikzcd}$$

в которой $j(y,v)=(g(y),\psi(y),v)$, а вертикальные отображения являются проекциями. Произведение задается как композиция

$$h^{i+n}(Y\times\mathbb{R}^n, Y\times\mathbb{R}^n\setminus X_y)\bullet h^{j+m}(Z\times\mathbb{R}^m, Z\times\mathbb{R}^m\setminus Y_\psi)\xrightarrow{1\times p^*}$$

$$h^{i+n}(Y\times\mathbb{R}^n, Y\times\mathbb{R}^n\setminus X_y)\bullet h^{j+m}(Z\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n, Z\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\setminus Y_\psi\times\mathbb{R}^n)\xrightarrow{\bullet}$$

$$h^{i+j+m+n}(Z\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n, Z\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\setminus X_{(\psi f, y)}),$$

где второй гомоморфизм есть произведение, уже определенное выше для замкнутых вложений.

<u>3.1.8.</u> Определим, наконец, <u>прямой образ</u>

$$f_*: h^i(X\xrightarrow{gf}Z)\longrightarrow h^i(Y\xrightarrow{g}Z)$$

для собственного отображения $f: X\to Y$ и произвольного отображения $g: Y\to Z$. Поскольку f собственное, существует отображение $y: X\to I^n$, где I^n – замкнутый единичный куб в $\mathbb{R}^n$, такое что (f,y) – замкнутое вложение. Пусть $\bar{\gamma}^n$ – канонический образующий группы $h^n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus I^n)$. Выберем отображение $\psi: Y\to\mathbb{R}^m$, разлагающее отображение g. Тогда прямой образ задается как композиция[1)]

$$h^{i+m+n}(Z\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n, Z\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\setminus X_{(\psi f,y)})\xrightarrow{\text{res}}$$

$$h^{i+m+n}(Z\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n, Z\times\mathbb{R}^m\times(\mathbb{R}^n\setminus I^n)\cup(Z\times\mathbb{R}^m\setminus Y_\psi)\times\mathbb{R}^n)$$

$$\xleftarrow{\times\bar{\gamma}^n} h^{i+m}(Z\times\mathbb{R}^m, Z\times\mathbb{R}^m\setminus Y_\psi).$$

Непосредственно проверяется, что эти три операции не зависят от выбора разложений и удовлетворяют аксиомам кососкоммутативной бивариантной теории.

<u>3.1.9.</u> ЗАМЕЧАНИЕ. Если бивариантная теория h построена по теории когомологий h^*, то ассоциированным с h контравариант-

---

1) Ниже res – отображение взятия ограничения (от английского restriction). Заметим, что умножение на $\bar{\gamma}^n$ является изоморфизмом, поэтому нужная композиция определена. – <u>Прим. перев.</u>

ным функтором будет снова h^* : равенство

$$h^i(X \xrightarrow{id} X) = h^i(X)$$

сразу следует из определения, если в качестве рассматриваемого вложения взять вложение X в себя. Ассоциированный ковариантный функтор определяется через замкнутое вложение X в $\mathbb{R}^n$ по формуле

$$h_i(X) = h^{n-i}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus X).$$

Это определение согласуется с обычным определением групп гомологий, ассоциированных с данной теорией когомологий, по крайней мере для конечных клеточных разбиений X (см. [Wh]). В случае когда пространство X некомпактно, но его одноточечная компактификация $X^c = X \cup \{*\}$ есть клеточное разбиение, имеют место равенства

$$h_i(X) = h^{n-i}(S^n \setminus \{*\}, S^n \setminus X^c) = h_i(X^c/\{*\}).$$

Поэтому $h_*(X)$ – гомологии с замкнутыми, или локально-конечными, носителями (гомологии Бореля – Мура, если $h^* = H^*$). См. § 3.3, где рассмотрены другие возможные носители.

§ 3.2. Преобразования Гротендика топологических теорий

3.2.1. Пусть k^*, h^* – мультипликативные теории когомологий, удовлетворяющие условиям п.3.1.2, а t^* – естественное преобразование из k^* в h^*. Гомоморфизмы

$$t^* : k^*(X, A) \longrightarrow h^*(X, A)$$

не обязаны сохранять градуировку, но должны коммутировать с произведениями, а канонический образующий $\bar{\gamma}_k$ из $k^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{0\})$ должен переходить в образующий $\bar{\gamma}_h$ из $h^1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Пусть k, h – бивариантные теории, построенные в § 3.1 по k^* и h^*. Тогда t^* задает преобразование Гротендика

$$t : k \longrightarrow h$$

бивариантных теорий. А именно, пусть дано отображение $f : X \longrightarrow Y$. Представим f вложением в $Y \times \mathbb{R}^n$ и определим отображение t

так, чтобы диаграмма

$$\begin{array}{ccc} k(X \xrightarrow{f} Y) & \dashrightarrow^{t} & h(X \xrightarrow{f} Y)) \\ \| & & \| \\ k^*(Y \times \mathbb{R}^n, Y \times \mathbb{R}^n \setminus X) & \xrightarrow{t^*} & h^*(Y \times \mathbb{R}^n, Y \times \mathbb{R}^n \setminus X) \end{array}$$

была коммутативной. Из конструкции § 3.1 видно, что преобразование t не зависит от выбора вложения для f и коммутирует со взятием произведений и прямых и обратных образов.

3.2.2. ПРИМЕРЫ. Вот некоторые стандартные примеры таких преобразований: характер Чженя $ch: K \longrightarrow H_{\mathbb{Q}}$ из комплексной K-теории в гомологии с рациональными коэффициентами; преобразование комплексификации из KO в K; операции Адамса ψ^k из K в $K \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$ 1). Когомологические операции, для $k^* = h^*$, будут рассмотрены в § 4.2.

§ 3.3. Носители

Если h – бивариантная теория, построенная по теории когомологий h^*, то ни одна из ассоциированных групп не имеет компактных носителей. Цель настоящего параграфа – показать, как построить по бивариантной теории h новые бивариантные теории, для которых ассоциированные контравариантные, или ковариантные, или и те и другие группы имеют компактные носители. Процедура построения чисто формальная; заинтересовавшийся читатель без особого труда обобщит это построение на бивариантные теории с другими семействами носителей или распространит приведенные конструкции за рамки топологии.

3.3.1. В качестве нижележащей категории возьмем ту же категорию топологических пространств, что и в п.3.1.1, но будем теперь считать все непрерывные отображения ограниченными морфизмами. Независимыми по-прежнему считаем расслоенные квадраты. Положим

$$h(X \xrightarrow{f} Y) = \varinjlim h(K \xrightarrow{f_K} Y);$$

---

1) Поскольку $\psi^k(u) = \frac{1}{k}u$, где $u \in k^2(pt)$ – канонический образующий. – Прим.перев.

прямой предел берется по всем $p: K \to X$, для которых fp – собственное отображение. Для морфизмов $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ произведение в $\tilde{h}$ определяется при помощи перехода к прямому пределу по всем $p: K \to X$, $q: L \to Y$, где fp и gp собственные, в диаграмме

$$h(K \to Y) \otimes h(L \to Z) \xrightarrow{q^* \otimes 1} h(K \times_Y L \to L) \otimes h(L \to Z)$$

$$\xrightarrow{\ \cdot\ } h(K \times_Y L \to Z).$$

Определения прямого и обратного образов, а также проверку аксиом бивариантной теории для $\tilde{h}$ мы предоставляем читателю. Ассоциированными контравариантным и ковариантным функторами являются

$$\tilde{h}^*(X) = h^*(X)\ , \ \ \tilde{h}_*(X) = \varinjlim h_*(K),$$

где предел берется по всем компактным подмножествам K в X.

<u>3.3.2.</u> Пусть снова все непрерывные отображения считаются ограниченными морфизмами, но расслоенный квадрат

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

считается независимым, только когда g – собственное отображение. Тогда положим

$$\tilde{h}(X \xrightarrow{f} Y) \longrightarrow \varinjlim h(K \xrightarrow{fp} Y),$$

где предел берется по всем $p: K \to X$ с компактными K. Мы получаем бивариантную теорию $\tilde{h}$, для которой ассоциированными группами будут

$$\tilde{h}^*(X) = \varinjlim h^*(X, X \setminus K)\, ,\ \tilde{h}_*(X) = \varinjlim h_*(K)\, ;$$

предел берется по всем компактным подмножествам K в X.

<u>3.3.3.</u> Наконец, если ограниченные морфизмы должны быть собственными, а независимые квадраты – такие же, как в п.3.3.2, то

полагаем

$$\bar{h}(X \to Y) = \varinjlim h(X \times_Y K \to Y),$$

где предел берется по всем отображениям $K \to Y$ с компактными K. В этом случае получается бивариантная теория, для которой

$$\bar{h}^*(X) = \varinjlim h^*(X, X \setminus K), \bar{h}_*(X) = h_*(X);$$

предел берется по всем компактным подмножествам K в X.

§ 3.4. Специализация

Интуитивно гомоморфизм специализации преобразует гомологии общего слоя отображения $f: X \to Y$ в гомологии некоторого специального слоя при непрерывном скольжении цикла над кривой в Y. Бивариантный язык позволяет дать определение специализации, очень близкое к такому интуитивному представлению, немедленно приводящее к формулам специализации в различных частных случаях (см. п.6.3.3 и ч.II, § 1.2).

Другие подходы к изучению специализации описаны в $[\mathrm{Ve}_4]$ для алгебраических отображений и в [SGA-4½, гл.V] для сопряженных обратных гомоморфизмов в когомологиях.

3.4.1. Чтобы определить гомоморфизм специализации, мы наложим на теорию когомологий h^* дополнительное требование: ограничение

$$h^*([0,1] \times \mathbb{R}^n, A) \to h^*((0,1] \times \mathbb{R}^n, A \cap (0,1] \times \mathbb{R}^n)$$

является изоморфизмом, если A открыто в $[0,1] \times \mathbb{R}^n$. Этому требованию удовлетворяют когомологические теории, заданные процедурой Чеха из п.3.1.3.

3.4.2. ЛЕММА. *Пусть отображение $f: X \to [0,1]$ является расслоением вне $\{0\}$, т.е. имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & X \setminus f^{-1}(0) \arrow[l, phantom, "\supset"] \arrow[d, "f'"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & (0,1] \times X_1 \arrow[dl, "pr"] \\
{[0,1]} & (0,1] \arrow[l, phantom, "\supset"] &
\end{tikzcd}$$

где $X_1 = f^{-1}(1)$, а f' – ограничение отображения f. Тогда гомоморфизм взятия обратного образа

$$h(X \xrightarrow{f} [0,1]) \longrightarrow h(X_1 \longrightarrow \{1\})$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Пусть $X' = X \setminus f^{-1}(0)$. Представим отображение f замкнутым вложением в $[0,1]\times\mathbb{R}^n$. Согласно утверждению п.3.4.1, примененному к $A = [0,1]\times\mathbb{R}^n \setminus X$, взятие обратного образа

$$h(X \xrightarrow{f} [0,1]) \longrightarrow h(X' \longrightarrow (0,1])$$

есть изоморфизм. Взятие обратного образа

$$h(X' \longrightarrow [0,1]) \longrightarrow h(X_1 \longrightarrow \{1\})$$

является изоморфизмом, поскольку $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus X_1)$ – деформационный ретракт пары $((0,1]\times\mathbb{R}^n, (0,1]\times(\mathbb{R}^n\setminus X_1))$.

3.4.3. Рассмотрим отображение $f : X \longrightarrow Y$. Пусть $y_0, y_1 \in Y$, $X_0 = f^{-1}(y_0)$, $X_1 = f^{-1}(y_1)$, и пусть

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow Y$$

– путь с $\gamma(0) = y_0, \gamma(1) = y_1$, такой что индуцированное отображение

$$[0,1]\times_\gamma X \longrightarrow [0,1]$$

локально-тривиально вне $\{0\}$. Определим гомоморфизм специализации

$$\sigma_\gamma : h_*(X_1) \longrightarrow h_*(X_0)$$

посредством диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & h(X_1 \longrightarrow \{1\}) = h_*(X_1) \arrow[d, dashed, "\sigma_\gamma"] \\
h([0,1]\times_\gamma X \to [0,1]) \arrow[ur, "\approx"] \arrow[dr] & \\
 & h(X_0 \longrightarrow \{0\}) = h_*(X_0)
\end{tikzcd}$$

3.4.4. Как мы видели, любой элемент α из $h(X\to Y)$ задает при взятии обратного образа элементы α_y из $h(f^{-1}(y)\longrightarrow\{y\})=h_*(f^{-1}(y))$ для всех $y\in Y$. Непосредственно из определения гомоморфизма специализации вытекает, что

$$\sigma_\gamma(\alpha_{y_1})=\alpha_{y_0}$$

для любого такого α и любого пути γ из y_0 в y_1, для которого определена специализация.

Глава 4

ОРИЕНТАЦИИ В ТОПОЛОГИИ

В этой главе мы рассматриваем некоторые из структур на отображении $f: X \longrightarrow Y$, которые определяют элементы из $h(X \xrightarrow{f} Y)$ для различных топологических теорий h. Наша цель – показать, что язык бивариантных теорий дает простой и естественный подход ко многим хорошо известным теоремам типа теоремы Римана – Роха из топологии.

§ 4.1. Нормально неособые отображения

4.1.1. Отображение $f: X \longrightarrow Y$ топологических пространств будем называть нормально неособым (н.н.о.), если имеется диаграмма

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i"] \arrow[d, shift right, "\pi"'] & Y \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[u, shift right, "s"'] & Y \end{tikzcd} \qquad (1)$$

в которой $\pi: N \longrightarrow X$ есть векторное расслоение с нулевым сечением s, i – открытое вложение[1], p – проекция, а отображение f является композицией отображений s, i и p. (Пред-

[1] Послойное. – Прим. перев.

положение о существовании указанного векторного расслоения можно ослабить, потребовав, чтобы (X, π, N, s) было микрорасслоением.) Геометрически это означает, что особенности пространства X в точках x не хуже и не лучше особенностей пространства Y в точках $f(x)$. Расслоение $N = N_f$ называется нормальным расслоением, а диаграмма (I) – нормально неособой диаграммой (н.н.о. диаграммой) отображения f ; целое число $d = rank(N) - n$ называют коразмерностью этого отображения.

4.1.2. ПРИМЕРЫ. Любое сечение $s : X \to E$ векторного расслоения E нормально неособо, и его нормальным расслоением является E. Проекция $\pi : E \to X$ векторного расслоения нормально неособа, и его нормальным расслоением является $\pi^* F$, где $E \oplus F$ – тривиальное расслоение. Более общо, всякое расслоение, слоем которого служит n-мерное многообразие, нормально неособо.

4.1.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $f : X \to Y$ – н.н.о. отображение коразмерности d с нормальным расслоением N. Пусть, далее, h – бивариантная теория, построенная по некоторой мультипликативной теории когомологий h^*. Предположим, что нормальное расслоение является N h^*-ориентируемым, т.е. N имеет класс Тома в $h^r(N, N \setminus X)$, $r = rank(N)$. Тогда существует взаимно-однозначное соответствие между сильными ориентациями отображения f в $h^d(X \to Y)$ и классами Тома нормального расслоения N в $h^r(N, N \setminus X)$.

Доказательство. Это соответствие задается изоморфизмом вырезания

$$h^r(N, N \setminus X) \cong h^r(Y \times \mathbb{R}^n, Y \times \mathbb{R}^n \setminus X)$$

и отождествлением стоящей справа группы с группой $h^d(X \xrightarrow{f} Y)$. Если u – класс Тома, а $g : W \to X$ – замкнутое вложение, то изоморфизм Тома – Дольда

$$h^i(X, X \setminus W) \xrightarrow{\pi^*(\,) \cup u} h^{i+r}(N, N \setminus W)$$

совпадает с гомоморфизмом

$$h^i(W \xrightarrow{g} X) \xrightarrow{\cdot u} h^{i+d}(W \xrightarrow{fg} Y).$$

Это же, очевидно, справедливо и для произвольного отображения $g : W \to X$, нужно лишь заменить g вложением в $X \times \mathbb{R}^m$.

Предложение следует теперь из того, что классы Тома и сильные ориентации определены с точностью до умножения на обратимые элементы из $h^0(X)$.

4.I.4. Пусть $t: k \to h$ – описанное в § 3.2 преобразование Гротендика бивариантных теорий, возникающее из естественного преобразования теорий когомологий, и пусть $f: X \to Y$ – н.н.о. отображение, а $u_k \in k^d(X \xrightarrow{f} Y)$, $u_h \in h^d(X \xrightarrow{f} Y)$ – ориентации отображения f, удовлетворяющие условиям предыдущего предложения. Тогда имеет место формула Римана – Роха

$$t(u_k) = w_f \cdot u_h , \tag{2}$$

где w_f – некоторый однозначно определенный элемент из $h^*(X)$. Пусть $f_{k!}$ и $f_k^!$ – гомоморфизмы Гизина, заданные на k^* и k_* классом u_k, и пусть гомоморфизмы $f_{h!}$ и $f_h^!$ в h^* и h_* определены аналогично по u_h. С помощью общего формализма, введенного в § 2.7, мы получаем SGA-6-формулу

$$t^\cdot(f_{k!}(b)) = f_{h!}(t^\cdot(b) \smile w_f) \tag{3}$$

для $b \in k^*(X)$ (ср. [Dy, c64]) и формулу Вердье

$$t_\cdot(f_k^!(a)) = w_f \frown f_h^!(t_\cdot(a)) \tag{4}$$

для $a \in k_*(Y)$.

§ 4.2. Когомологические операции

4.2.I. Все вышеизложенное применимо, в частности, когда $k^* = h^* = H^*$ и $t^* = S^*$ – когомологическая операция[I)] (см. [AH_1]). Если $u \in H^d(X \xrightarrow{f} Y)$ – ориентация н.н.о. отображения f, удовлетворяющего условиям предложения 4.I.3, то

$$S(u) = w_f \cdot u, \tag{5}$$

где $w_f \in H^*(X)$. Поскольку класс u определен однозначно, с точностью до умножения на обратимый элемент из $H^0(X)$, класс w_f не зависит от выбора u. Например, если S^* – полный квадрат Стинрода, то w_f – полный класс Штифеля – Уитни нормального расслоения к f; это построение равнозначно конст-

---

I) Мультипликативная. – Прим. перев.

рукции классов Штифеля – Уитни по Тому. Формулу (4) можно рассматривать как один из аспектов двойственности Уитни для пространств с особенностями; в случае когда f отображает многообразие в точку, получается формула

$$S_*[M] = w(T_M)^{-1} \frown [M], \tag{6}$$

где T_M – касательное расслоение к M, а $[M]$ – фундаментальный класс многообразия M.

4.2.2. Приведем пример того, как введенный нами формализм, даже для случая функторов когомологий и гомологий, упрощает изучение когомологических операций. Рассмотрим когомологическую операцию $S^{\cdot} = 1 + S^1 + S^2 + \ldots$, где S^i повышает степени на i, и пусть

$$\bar{S}^{\cdot} = 1 - S^1 + ((S^1)^2 - (S^2)) + \ldots \tag{7}$$

– обратная операция. В результате получим преобразование Гротендика $\bar{S}: H \to H$, такое что $\bar{S} \cdot S = id = S \cdot \bar{S}$.

ЛЕММА. Если пространство X компактно, то

$$\langle S^{\cdot} b, a \rangle = \langle b, \bar{S}_* a \rangle \tag{8}$$

для всех $b \in H^*(X)$, $a \in H_*(X)$.

Доказательство. Действительно, для любого собственного отображения $p: X \longrightarrow P$

$$\bar{S}_* p_*(S^{\cdot} b \frown a) = p_* \bar{S}_*(S^{\cdot} b \frown a) = p_*(b \frown \bar{S}_* a),$$

поскольку $\bar{S}_*$ коммутирует со взятием прямых образов и произведений; утверждение леммы получается из этой формулы при $P = pt$.

Пусть теперь M – ориентированное многообразие. Определим класс $\bar{w} \in H^*(M)$ посредством формулы

$$S_*[M] = \bar{w} \frown [M]. \tag{9}$$

Согласно доказанной выше лемме, это условие эквивалентно следующему:

$$\langle S^{\cdot}(b), [M] \rangle = \langle b \smile \bar{w}, [M] \rangle \tag{10}$$

для всех $b \in H^*(M)$. Если $f: M \longrightarrow M'$ – непрерывное отображение ориентированных многообразий и класс $\bar{w}'$ из $H^*(M')$ задан аналогичной формулой, то, согласно гипотезе Атьи – Херцебруха $[AH_1]$, справедлива формула

$$f_!(S^{\cdot}(b) \smile \bar{w}) = S^{\cdot}(f_!(b) \smile w' \tag{11}$$

для всех $b \in H^*(M)$. Здесь $f_!$ – гомоморфизм Гизина из $H^*(M)$ в $H^*(M')$, определяемый двойственностью Пуанкаре: $f_!(b) \frown [M'] = f_*(b \frown [M])$. Эта формула, впервые доказанная Спеньером [Sp], является формальным следствием предыдущего:

$$f_!(S^\cdot b \smile \bar{w}) \frown [M'] = f_*(S^\cdot b \frown S_\cdot[M]) = f_* S_\cdot(b \frown [M])$$
$$= S_\cdot f_*(b \frown [M]) = S_\cdot(f_!(b) \frown [M']) = S^\cdot(f_!(b)) \smile \bar{w}' \frown [M'] .$$

§ 4.3. Теорема Римана – Роха для дифференцируемых многообразий

В категории дифференцируемых многообразий все дифференцируемые отображения нормально неособы и нормальное расслоение единственно с точностью до стабильного изоморфизма. Рассматривая бивариантные теории (со значениями в категории множеств), связанные с различными структурами, которыми может быть снабжено стабильное нормальное расслоение, получаем компактное утверждение, охватывающее серию результатов, известных как "теорема Римана – Роха для дифференцируемых многообразий" ([A H$_3$], [Hi$_1$]).

4.3.1. В качестве низлежащей категории возьмем категорию C^∞-дифференцируемых многообразий и их C^∞-отображений. Ограниченными морфизмами пусть будут одни только тождественные отображения. Расслоенный квадрат

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f'} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array} \qquad (12)$$

считаем независимым только в том случае, если он C^∞-трансверсален.

4.3.2. Каждому C^∞-отображению $f: X \to Y$ сопоставим множество $U(X \xrightarrow{f} Y)$ всех комплексных структур на стабильном нормальном расслоении к f. Для таких отображений $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ имеется точная последовательность, связывающая нормальные рас-

слоения N_f, N_g и N_{gf}. Поэтому комплексные структуры на N_f и N_g определяют комплексную структуру на N_{gf}. Итак, получено произведение

$$U(X \xrightarrow{f} Y) \times U(Y \xrightarrow{g} Z) \xrightarrow{\cdot} U(X \xrightarrow{gf} Z).$$

Для трансверсального квадрата (12) имеем $g'^*(N_f) = N_{f'}$; значит, комплексная структура на N_f задает комплексную структуру на $N_{f'}$. Тем самым получен обратный образ

$$g^*: U(X \xrightarrow{f} Y) \longrightarrow U(X' \xrightarrow{f'} Y').$$

Все прямые образы устроены тривиально. Аксиомы бивариантной теории проверяются непосредственно.

Аналогично строится бивариантная теория $Spin$, где $Spin\,(X \xrightarrow{f} Y)$ – это множество $Spin$-структур на N_f, т.е. множество поднятий структурной группы нормального расслоения до структурной группы $Spin(n)$ – двулистной накрывающей группы $SO(n)$ (см. [Mi]). Та же конструкция приводит к бивариантной теории $Spin^{\mathbb{C}}$, где $Spin^{\mathbb{C}}(n) = Spin(n) \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} U(1)$.

Определим C_1-структуру на отображении $f: X \to Y$ как ориентацию расслоения N_f вместе с классом c из $H^2(X;\mathbb{Z})$, ограничение которого на $H^2(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ есть $w_2(N_f)$. Ясно, что C_1-структуры на отображениях $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ задают C_1-структуру на отображении $gf: X \to Z$: если класс c (соотв. d) задает структуру на f (соотв. g), то класс $c + f^*(d)$ задает C_1-структуру на gf. Для трансверсального квадрата (12), если класс c задает C_1-структуру на f, то $g^*(c)$ задает C_1-структуру на f'. Таким образом определена бивариантная теория C_1.

Для любой мультипликативной теории когомологий h^* определим $\bar{h}\,(X \xrightarrow{f} Y)$ как множество классов Тома расслоения N_f (не обязательно одной размерности). Согласно предложению 4.1.3, эти классы соответствуют сильным ориентациям отображения f в бивариантной группе $h(X \xrightarrow{f} Y)$; определения произведения и обратного образа при таком описании очевидны.

<u>4.3.3.</u> Теорему Римана – Роха для дифференцируемых многообразий можно резюмировать в виде следующей коммутативной диаграммы пре-

образований Гротендика:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spin} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[d] \\ \overline{KO} \arrow[r] & K \arrow[r] & \overline{H}_{\mathbb{Q}} \end{tikzcd} \tag{13}$$

Преобразования в верхней строке диаграммы индуцированы соответствующими гомоморфизмами групп

$$Spin(n) \longrightarrow Spin^{\mathbb{C}}(n) \longrightarrow SO(n)\times U(1);$$

по второму гомоморфизму $Spin^{\mathbb{C}}$-структура на расслоении индуцирует ориентацию расслоения и задает комплексное линейное расслоение, первый класс Черна которого и есть класс c, задающий C_1-структуру. Преобразования в нижней строке индуцированы комплексификацией $KO \to K$ и характером Черна $K \to H(\,;\mathbb{Q})$. Преобразования $Spin \to \overline{KO}$ и $Spin^{\mathbb{C}} \to \overline{K}$ определены благодаря тому, что $Spin$- (соотв. $Spin^{\mathbb{C}}$-) расслоение N имеет класс Тома μ_N (соотв. $\mu_N^{\mathbb{C}}$) в KO-(соотв. в K-) теории [ABS]. Наконец, чтобы построить преобразование из C_1 в $\overline{H}_{\mathbb{Q}}$, рассмотрим отображение $f: N \to Y$, с нормальным расслоением N, ориентированным при помощи класса Тома $u \in H^*(N, N\setminus X)$. Тогда

$$\pi^*(e^{c/2}\hat{A}(N)^{-1}) \cup u \tag{14}$$

задает класс Тома в $H^*(N, N\setminus X;\mathbb{Q})$, который и является нужным нам элементом из $H_{\mathbb{Q}}(X \xrightarrow{f} Y)$; через $\hat{A}$ здесь обозначен класс Хирцебруха, ассоциированный со степенным рядом $2\sqrt{z}/\operatorname{sh} 2\sqrt{z}$ [Hi_2].

Коммутативность первого из квадратов в диаграмме (13) следует из того, что для $Spin$-расслоения N класс $\mu_N^{\mathbb{C}}$ является комплексификацией класса μ_N [ABS]. Коммутативность второго квадрата устанавливается выкладкой, проверяющей, что класс $ch(\mu_N^{\mathbb{C}})$ есть класс, заданный формулой (14) (см. [Sto, с.270]).

Диаграмму (13) можно пополнить преобразованием Гротендика $U \longrightarrow Spin^{\mathbb{C}}$, которое индуцировано гомоморфизмами $U(n) \to Spin^{\mathbb{C}}(2n)$.

■

4.3.4. Диаграмма (13) содержит утверждение, что $Spin$-, $Spin^{\mathbb{C}}$- и C_1-структуры на нормальных расслоениях задают функториальные гомоморфизмы Гизина в KO, K и $H(;\mathbb{Q})$, и показывает, как эти гомоморфизмы связаны друг с другом. Продемонстрируем теперь, как отсюда вывести обычную теорему Римана – Роха [Hi_1].

СЛЕДСТВИЕ. Если $f: X \longrightarrow Y$ – отображение компактных ориентированных многообразий, а c – класс в $H^2(X;\mathbb{Z})$, поднимающий класс $f^*w_2(Y)-w_2(X)$, то для любого $\eta \in K^*(X)$ существует элемент ξ в $K^*(Y)$, такой что

$$f_!\left(ch(\eta)e^{c/2}\hat{A}(T_X)\right) = ch(\xi)\hat{A}(T_Y).$$

Здесь $f_!: H^*(X;\mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(Y;\mathbb{Q})$ – гомоморфизм Гизина, заданный двойственностью Пуанкаре.

Доказательство. Так как отображение $Spin^{\mathbb{C}} \longrightarrow C_1$ сюръективно, то структура c продолжается до $Spin^{\mathbb{C}}$-структуры на f, которая, согласно (2), определяет некоторый элемент в $K(X \xrightarrow{f} Y)$. Теперь, согласно SGA-6-формуле (4) из п.4.1.4, примененной к преобразованию Гротендика $ch: K \longrightarrow H(;\mathbb{Q})$, требуемое заключение получается при $\xi = f_{K!}(\eta)$.

Глава 5

ТРАНСФЕР И ЧИСЛО НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

Если $x: X \to X$ – отображение компактного пространства в себя с множеством неподвижных точек $|X|$, то каждая компонента множества $|X|$ имеет некоторый индекс, измеряющий ее вклад в число Лефшеца данного отображения. Эта информация задается элементом из $H_0(|X|)$. Всякому локально-тривиальному расслоению $f: X \to Y$ с послойным эндоморфизмом $x: X \to X$ (т.е. таким, что $f \circ x = f$) хотелось бы сопоставить глобально заданный элемент, который при ограничении на слой над $P \in Y$ давал определенный выше индекс в $H_0(|f^{-1}(P)|)$. Бивариантные теории хорошо подходят для построения таких классов: они будут элементами из $H^0(|X| \to Y)$. Гомоморфизмы Гизина из $H^0(|X|)$ в $H^0(Y)$, заданные этими классами, будут трансферами Дольда [Do_2]. Изучение трансфера значительно упростится, если заметить, что конструкция Дольда по существу представляет собой построение канонических ориентаций в некоторых бивариантных группах.

5.0.1. Пусть объектами нижележащей категории $\mathcal{C}$ являются тройки (X, X_0, x), где X – топологическое пространство, удовлетворяющее условиям гл. 3, X_0 – открытое подпространство в X, а $x: X_0 \to X$ – отображение. Морфизм из (X, X_0, x) в (Y, Y_0, y) – это непрерывное отображение $f: X \to Y$, такое что $f(X_0) \subset Y_0$ и $y \circ f = f \circ x$.

Пусть $|X| \subset X_0$ – множество неподвижных точек $P \in X_0$ $(x(P) = P)$. Для определенных выше морфизмов f пусть $|f|: |X| \to |Y|$ -индуцированное отображение подпространств неподвижных точек.

Будем считать морфизм в категории $\mathcal{C}$ ограниченным, если индуцированное отображение $|f|$ собственное. Независимыми квадратами

в $\mathscr{C}$ пусть будут обычные коммутативные квадраты

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd} \qquad (1)$$

в категории $\mathscr{C}$, являющиеся расслоенными квадратами на входящих в них пространствах.

5.0.2. Пусть h – топологическая теория, удовлетворяющая условиям гл.3. Каждому морфизму $f:X\to Y$ категории $\mathscr{C}$ сопоставим группу

$$\tilde{h}^i(X \xrightarrow{f} Y) = h^i(|X| \xrightarrow{|f|} |Y|).$$

Так как функтор $(X, X_0, x) \to |X|$ сохраняет ограниченные отображения и независимые квадраты, $\tilde{h}$ является бивариантной теорией на $\mathscr{C}$.

5.0.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Морфизм $f:X\to Y$ категории $\mathscr{C}$ называется морфизмом Дольда, если существует замкнутое вложение пространства X в открытое подмножество U в $Y\times\mathbb{R}^n$ и послойная ретракция $r:U\to X$ над Y (т.е. $f\circ r = pr_1|_U$).

Важными примерами таких морфизмов являются локально-тривиальные расслоения конечного типа.

Это условие довольно сильное – Дольд полагает, что такие морфизмы можно трактовать как C^0-погружения, – но нет никаких требований к отображениям пространств X и Y в себя (ср. п. 6.6.2).

5.0.4. Конструкция. Пусть $f: X \to Y$ – морфизм Дольда, а $X\subset U \subset Y\times\mathbb{R}^n$ и $r:U\to X$ – соответствующие вложения и ретракция. Пусть $U_0 = r^{-1}(X_0)$. Определим отображение

$$d: U_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

формулой $d(P) = pr_2(P) - pr_2(x(r(P)))$, где pr_2 – проекция

из $Y\times\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^n$. Можно проверить, что $d^{-1}(\{0\})\cap|Y|\times\mathbb{R}^n=|X|$[1]. Поэтому d индуцирует отображение пар

$$(U_0\cap|Y|\times\mathbb{R}^n,\ U_0\cap|Y|\times\mathbb{R}^n\setminus|X|)\xrightarrow{d}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\}).$$

Пусть γ^n – канонический образующий в $h^n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. Тогда

$$d^*(\gamma^n)\in h^n(U_0\cap|Y|\times\mathbb{R}^n,\ U_0\cap|Y|\times\mathbb{R}^n\setminus|X|).$$

Далее, по аксиоме вырезания эта группа совпадает с группой $h^n(|Y|\times\mathbb{R}^n,|Y|\times\mathbb{R}^n\setminus X)$, которая по определению есть $h^0(|X|\xrightarrow{|f|}|Y|)$, или $h^0(f)$. Образ элемента $d^*(\gamma^n)$ при таком соответствии определим как $\theta(f)$,

$$\theta(f)\in h^0(|X|\xrightarrow{|f|}|Y|).$$

5.0.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Элемент $\theta(f)$ не зависит от произвола, имевшего место при его построении. Классы $\theta(f)$ являются каноническими ориентациями морфизмов Дольда, согласованными со взятием обратных образов. Точнее:

(i) Если $f:X\to Y$ и $g:Y\to Z$ – морфизмы Дольда, то $gf:X\to Z$ – также морфизм Дольда и

$$\theta(gf)=\theta(f)\cdot\theta(g)$$

в $h^0(|X|\xrightarrow{|gf|}|Z|)$.

(ii) Если $f:X\to Y$ – морфизм Дольда, то для любого независимого квадрата (I) f' также является морфизмом Дольда и

$$\theta(f')=g^*\theta(f)$$

в $h^0(|X'|\xrightarrow{|f'|}|Y'|)$.

5.0.6. Последнее предложение и формализм § 2.5 показывают, что морфизмам Дольда $f:X\to Y$ соответствуют гомоморфизмы Гизина

$$f^!:h_i(|Y|)\longrightarrow h_i(|X|)\quad,\quad f^!=\theta(f)^*,$$

---

[1] Если $P\in U_0\cap|Y|\times\mathbb{R}^n$ и $d(P)=0$, то $pr_2(x(r(P)))=pr_2(P)$. Кроме того, $pr_1(xr(P))=fxr(P)=yfr(P)=y\,pr_1(P)=pr_1(P)$. Поэтому $xr(P)=P$ и, следовательно, $P\in X$, $r(P)=P$ и $x(P)=P$.

и
$$f_! : h^i(|X|) \longrightarrow h^i(|Y|) \quad , \quad f_! = \theta(f).$$

Второй из этих гомоморфизмов, определенный только в случае, когда $|f|$ собственное, и есть трансфер Дольда. Эти гомоморфизмы профункториальны и согласованы со взятием обратных образов для произвольных $Y' \to Y$. Любое преобразование Гротендика $h \to h'$ топологических теорий переводит канонические ориентации теории h в канонические ориентации теории h'; в частности, трансферы коммутируют со стабильными когомологическими операциями.

<u>5.0.7.</u> Для ограниченного морфизма Дольда $f: X \to Y$ определим <u>индекс</u> $I = I_f(x)$ равенством $f_!(1) = |f|_*(\theta(f)) \in h^0(Y)$. Из аксиом A123 и A12 бивариантной теории следует, что композиции
$$h^i(|Y|) \xrightarrow{|f|^*} h^i(|X|) \xrightarrow{f_!} h^i(|Y|)$$

и
$$h_i(|Y|) \xrightarrow{f^!} h_i(|X|) \xrightarrow{|f|_*} h_i(|Y|)$$

являются умножениями на индекс I.

Когда f отображает X в точку, будем писать $\theta(X) = \theta(f) \in h_0(|X|) = h^0(|X| \to pt)$. Если $|X|$ компактно, то $|f|_*(\theta(X)) = I$ – число неподвижных точек отображения $x: X_0 \to X$. В случае когда $X = X_0$ компактно, а h – сингулярные гомологии, введенный индекс совпадает с числом Лефшеца отображения x([Do_1, гл. VII, п. 6.6]). Отметим, что в $\theta(X)$ отражен вклад каждой из компонент пространства $|X|$ и что этот класс определен как гомологический класс Бореля – Мура даже для некомпактного $|X|$.

Для произвольного морфизма Дольда $f: X \to Y$ из свойства (ii) инвариантности относительно взятия обратных образов вытекает, что при ограничении $h^0(|Y|) \longrightarrow h^0(\{P\})$ индекс I переходит в число Лефшеца слоя $f^{-1}(P)$ для всех $P \in |Y|$. Из свойства (i), примененного к диаграмме $X \xrightarrow{f} Y \to pt$, следует формула
$$\theta(X) = \theta(f) \cdot \theta(Y).$$

Эта формула выражает число Лефшеца пространства X в терминах слоев отображения f и неподвижных точек на Y (см. [Do_2, п. 8.18]).

<u>5.0.8. Доказательство предложения 5.0.5.</u> Мы проверим, что элемент $\theta(f)$ не зависит от произвола при его построении. Прежде все-

го, заметим, что окрестность U можно заменить любой меньшей окрестностью. Вложение X в $Y\times\mathbb{R}^n$ задается отображением $\varphi: X\longrightarrow\mathbb{R}^n$. Если r и r' – две послойные ретракции U на X над Y, то положим

$$r_t(\eta,v)=r(\eta,t\varphi r(\eta,v))+r'(\eta,(1-t)\varphi r'(\eta,v)),$$

где $(\eta,v)\in U\subset Y\times\mathbb{R}^n$, $0\leqslant t\leqslant 1$. Уменьшив в случае необходимости U, получим семейство ретракций r_t над Y, такое что $r_0=r'$, $r_1=r$. Тогда

$$d_t(\eta,v)=v-\varphi\times r_t(\eta,v)$$

задает гомотопию, при которой $d_t^{-1}(\{0\})\cap|Y|\times\mathbb{R}^n=|X|$ для всех t, и поэтому $d_0^*\gamma^n=d_1^*\gamma^n$. Для того чтобы установить независимость $\theta(f)$ от выбранного вложения, рассмотрим другое вложение, задаваемое отображением $\psi: X\longrightarrow\mathbb{R}^m$. Достаточно показать, что φ и (φ,ψ) определяют элементы из

$$h^n(|Y|\times\mathbb{R}^n,|Y|\times\mathbb{R}^n\setminus|X_\varphi|)\quad\text{и}\quad h^{n+m}(|Y|\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m,|Y|\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\setminus|X_{(\varphi,\psi)}|),$$

соответствующие друг другу относительно изоморфизма из п. 3.1.6. По построению этого изоморфизма, элемент $\alpha^*\gamma^n$ соответствует элементу $p^*(d^*\gamma^n)\smile q^*(\gamma^m)$, где p – проекция на $|Y|\times\mathbb{R}^n$, а q задается формулой

$$q(\eta,v,w)=w-\psi\times r(\eta,v).$$

Но $p^*d^*\gamma^n\smile q^*\gamma^m=D^*(\gamma^{n+m})$, где

$$D(\eta,v,w)=(d(\eta,v),q(\eta,v,w)),$$

и как раз это отображение D и используется при построении элемента $\theta(f)$ по вложению (f,φ,ψ) и ретракции $(\eta,v,w)\mapsto r(\eta,v)$.

Доказательство свойств (i) и (ii) для элемента $\theta(f)$ проводится непосредственно. В первом случае представим морфизм $f: X\longrightarrow Y$ вложением $(f,\varphi): X\to Y\times\mathbb{R}^n$ и ретракцией $r: U\to X$, а морфизм $g: Y\to Z$ – вложением $(g,\psi): Y\longrightarrow Z\times\mathbb{R}^m$ и ретракцией $s: V\to Y$. Тогда gf можно представить вложением $(gf,\psi f,\varphi): X\longrightarrow Z\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ и ретракцией $t: W\longrightarrow X$, которая задается формулой $t(\zeta,w,v)=r(s(\zeta,w),v)$, где $\zeta\in Z$, $v\in\mathbb{R}^n$, $w\in\mathbb{R}^m$, $W=(s\times\mathrm{id})^{-1}(U)$. Пусть $d_r: U_0\to\mathbb{R}^n$, $d_s: V_0\to\mathbb{R}^m$; $d_t: W_0\longrightarrow\mathbb{R}^{m+n}$ – отображения, построенные в § 5.4,

так что $d_r^* \gamma^n = \theta(f)$, $d_s^* \gamma^m = \theta(g)$ и $d_t^* \gamma^{m+n} = \theta(gf)$. Тогда
$$\theta(f)\cdot\theta(g) = (s\times id)^*(d_r^*\gamma^n)\cup d_s^*\gamma^m,$$

и, поскольку $d_r\circ(s\times id)\circ d_s = d_t$, получаем равенство $\theta(f)\cdot\theta(g) = \theta(gf)$. При доказательстве свойства (ii) нужно снова воспользоваться независимостью элемента $\theta(f)$ от произвола при его построении. Мы опустим это доказательство.

Глава 6

КЛАССЫ УИТНИ

Классы Уитни - первые из открытых характеристических классов - неоднократно выступали в математике в роли предтечи: свойства, первоначально доказанные для них, как оказывалось позднее, выполняются и для других характеристических классов (при этом часто упрощались доказательства и получались более глубокие следствия). Совсем недавно именно классы Уитни были определены первыми для пространств с особенностями [Su], и на их примере было обнаружено, что характеристические классы пространства лежат в его гомологиях (а не в когомологиях). Представленная в этой главе теория оказала влияние на нашу формулировку бивариантного языка и, как мы надеемся, послужит моделью будущих исследований.

Главным объектом исследования в гл. 6 является преобразование Гротендика ω, названное преобразованием Уитни из бивариантной теории $\mathbb{F}$ в mod 2-гомологии. Это преобразование полностью описывается теоремой 6А п. 6.2.1, а его комбинаторная формула

приводится в теореме 6B п. 6.5.2. Грубо говоря, преобразование Уитни описывает поведение классов Уитни по отношению к трем операциям бивариантной теории. Необходимость обратных образов и произведений пояснена в § 1.5. Идея о необходимости операции взятия прямого образа принадлежит Делиню (об ее аналоге для классов Черна см. [Mac$_1$]); эта операция устанавливает отношение между классами Уитни и эйлеровыми характеристиками (прямой образ в теории $\mathbb{F}$ измеряет эйлеровы характеристики слоев).

Доказательства представляют собой по большей части приятные упражнения из комбинаторной топологии; они либо опускаются, либо приводятся лишь в виде голой схемы.

В §§ 10.4, 10.5, 10.7 перечисляются нерешенные проблемы, связанные с тематикой этой главы, а также некоторые возможные обобщения.

6.1. Бивариантная теория $\mathbb{F}$

6.1.1. Конструктивные функции. *Конструктивным подмножеством* полиэдра X называется подпространство, получаемое из его подполиэдров с помощью конечной последовательности операций объединения, пересечения и дополнения. *Конструктивной функцией* α из полиэдра X в $\mathbb{Z}\ mod 2$ называется всякая функция, для которой $\alpha^{-1}(1)$ – конструктивное множество (а значит, конструктивным является и $\alpha^{-1}(0)$). Функция $\alpha: X \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ конструктивна тогда и только тогда, когда для некоторой триангуляции T полиэдра X эта функция постоянна на внутренностях симплексов из T. Такую триангуляцию мы называем α-*подогнанной*.

Для каждой конструктивной функции $\alpha: X \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ определим $mod 2$-целое число $\chi(X;\alpha)$ по формуле

$$\chi(X;\alpha) \equiv \sum_i (-1)^i \operatorname{rank} H_c^i(\alpha^{-1}(1)) \pmod 2$$

Если T есть α-подогнанная триангуляция, то число $\chi(X;\alpha)$ сравнимо по модулю 2 с числом симплексов разбиения T, на внутренностях которых α не обращается в нуль.

6.1.2. Определение теории $\mathbb{F}$. Мы построим бивариантную теорию $\mathbb{F}$ на категории полиэдров и кусочно-линейных отображений, в которой собственные отображения ограниченны, а расслоенные квадраты независимы. Для любого морфизма $f: X \to Y$ определим $\mathbb{F}(X \to Y) = \mathbb{F}^0(X \to Y)$ как множество конструктивных

функций $\alpha : X \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, удовлетворяющих приводимому ниже локальному условию Эйлера в каждой точке $x \in X$.

<u>Локальное условие Эйлера для функции</u> α <u>в точке</u> x. Выберем такие триангуляции T и T' полиэдров X и Y, чтобы T была α-подогнанной, а f – симплициальным отображением, и пусть x – внутренняя точка симплекса Δ разбиения T. Тогда

$$\alpha(x) = \chi(St^0(\Delta) \cap f^{-1}(y); \alpha)$$

для всех $y \in St^0(f(\Delta))$.

Здесь $St^0(\Delta)$ – открытая звезда симплекса Δ, т.е. объединение внутренностей всех симплексов, пересекающихся с внутренностью симплекса Δ. Локальное условие Эйлера, очевидно, не зависит от выбора разбиений T и T'. Значение локального условия Эйлера выяснится в конце этого параграфа.

Множество $\mathbb{F}(X \to Y)$ является группой относительно поточечного сложения конструктивных функций. Три операции бивариантной теории определяются следующим образом:

1) <u>Произведения.</u> Если $X \xrightarrow[f]{\alpha} Y \xrightarrow[g]{\beta} Z$, то

$$\alpha \cdot \beta(x) = \alpha(x)\beta(f(x)).$$

2) <u>Прямые образы.</u> Если
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\alpha"] & Y \arrow[r, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$
, а f – ограниченный морфизм, то

$$f_*\alpha(y) = \chi(f^{-1}(y); \alpha).$$

3) <u>Обратные образы.</u> Если квадрат
$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & X \arrow[d, "\alpha"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$
независим, то

$$g^*\alpha(x') = \alpha(g'(x')).$$

Мы опускаем проверку аксиом бивариантной теории. Хорошим упражнением может послужить проверка выполнения условия Эйлера для $f^*\alpha$.

ЗАМЕЧАНИЯ. Локальное условие Эйлера налагает значительные ограничения на конструктивные функции из $\mathbb{F}(X \to Y)$. Например:

для любого X множество $\mathbb{F}^*(X) = \mathbb{F}(X \xrightarrow{id} X)$ состоит из функций, постоянных на каждой компоненте связности полиэдра X;

для любого X множество $\mathbb{F}_*(X) = \mathbb{F}_*(X \to pt)$ состоит из функций α, таких что для некоторой α-подогнанной триангуляции T полиэдра X выполняется равенство $\chi(L,\alpha) = 1 - \alpha(p)$, где L – основание звезды (в барицентрическом измельчении триангуляции T полиэдра X) любого симплекса Δ разбиения T, а точка p лежит внутри Δ.

Если Y связно, а f не является отображением на, то $\mathbb{F}(X \to Y) = 0$.

<u>6.1.3. Эйлеровы отображения.</u> Теперь мы определим класс канонически $\mathbb{F}$-ориентированных отображений. Назовем отображение $f: X \to Y$ <u>эйлеровым</u>, если конструктивная функция, тождественно равная 1 на X, удовлетворяет локальному условию Эйлера во всех точках $x \in X$. Эта конструктивная функция обозначается через 1_f. Множество эйлеровых отображений, очевидно, замкнуто относительно взятия композиции, и 1_f задает каноническую ориентацию отображения f.

ПРИМЕРЫ. Отображение из X в точку эйлерово тогда и только тогда, когда X является $mod\,2$-эйлеровым пространством (см. [HT$_1$]), т.е. для всех $x \in X$

$$\chi(X, X \setminus \{x\}) \equiv 1 \mod 2.$$

В этом случае каноническая ориентация обозначается через 1_X.

Слои любого эйлерова отображения являются $mod\,2$-эйлеровыми пространствами. Любое расслоение, слоями которого являются $mod\,2$-эйлеровы пространства, определяет эйлерово отображение.

На рис. 1 показано эйлерово отображение в отрезок (оно задается вертикальной проекцией).

Если $X \xrightarrow{f} Y$ – собственное эйлерово отображение, то $\chi(f^{-1}(y))$ является локально-постоянной функцией на Y со

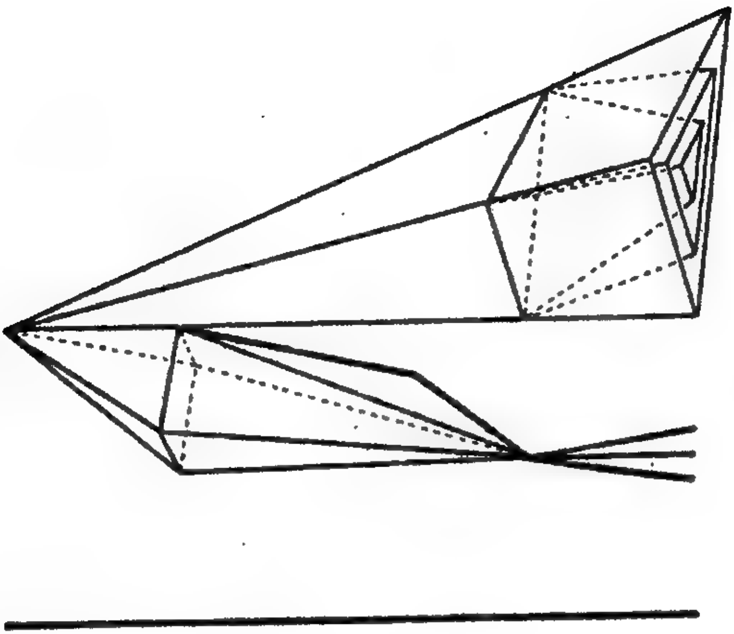


Рис. I

значениями в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Это следует из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr] \arrow[dr, "f", "1_f"'] & & Y \arrow[dl, "id"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

поскольку $f_* 1_f \in F(Y \xrightarrow{id} Y)$. Правильным локальным условием, гарантирующим это, и является локальное условие Эйлера.

§ 6.2. Преобразование Гротендика ω

6.2.1. В этом параграфе мы сформулируем основную теорему 6А. Доказательство ее мы отложим до §§ 6.4, 6.5.

Всюду далее в этой главе $H(X \to Y)$ будет обозначать бивариантную теорию $mod 2$-гомологий. Построенная в § 4.I каноническая ориентация в $H^d(X \to Y)$ нормально неособого отображения $f: X \to Y$ относительной коразмерности d

будет обозначаться через $[f]$; поскольку выбраны $mod\,2$-коэффициенты, классы, построенные в предложении 4.1.3, определены однозначно.

<u>ТЕОРЕМА 6А. Существует и единственно преобразование Гротендика ω из $\mathbb{F}$ в H, удовлетворяющее следующему условию нормировки: если X – многообразие, то $\omega(1_X) = w(TX)\cdot[X]$, где</u>

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "{[X]}"] & \\ X \arrow[ur, "w(TX)"] \arrow[rr, "\omega(1_X)"'] & & pt \end{tikzcd}$$

Отметим, что в этой теореме не делается различия между гладкими и полиэдральными многообразиями, поскольку TX интерпретируется как касательное микрорасслоение.

<u>6.2.2. Гомологический класс Уитни пространства</u>. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если $X \to pt$ является отображением Эйлера, то класс $w_*(X) \in H(X \to pt)$ определяется как $\omega(1_X)$.

В п. 6.5.2 мы убедимся, что это определение согласуется с определениями классов Уитни для $mod\,2$-эйлеровых пространств, данными в [Su], $[HT_1]$ и [Ak]. Из теоремы 6А непосредственно следует, что класс $w_*(X)$ двойствен по Пуанкаре классу $w(TX)$ в случае многообразий и что для компактных X аугментация преобразует класс $w_*(X)$ в $\chi(X)\,mod\,2$. Последнее утверждение получается, если взять прямой образ элемента $w_*(X)$ в диаграмме

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "w_*(X)"'] & pt \arrow[d] \\ & pt \end{tikzcd}$$

§ 6.3. Следствия теоремы 6А (формула Римана – Роха, теорема Вердье – Римана – Роха, специализация)

6.3.1. Формула Римана – Роха. Эйлеровы отображения имеют канонические $\mathbb{F}$-ориентации, а нормально неособые отображения – канонические H-ориентации. Отображения, являющиеся одновременно эйлеровыми и нормально неособыми, называются гладкими отображениями. Для таких отображений, как можно надеяться, выполняется формула Римана – Роха.

Гладкое отображение $f : X \to Y$ – это такое отображение, что у X имеется открытое покрытие множествами $U \approx f(U) \times \mathbb{R}^n$, на которых f является проекцией на первый сомножитель. Например, все расслоения с неособыми слоями гладки. (Термин выбран по аналогии с алгебраической геометрией.) Если отображение $f : X \to Y$ гладко, то над X определено микрорасслоение касательных к слоям

$$\begin{tikzcd} X \times_Y X \arrow[d, shift right, "\text{проекция на первый сомножитель}"'] \\ X \arrow[u, shift right, "\text{диагональ}"'] \end{tikzcd}$$

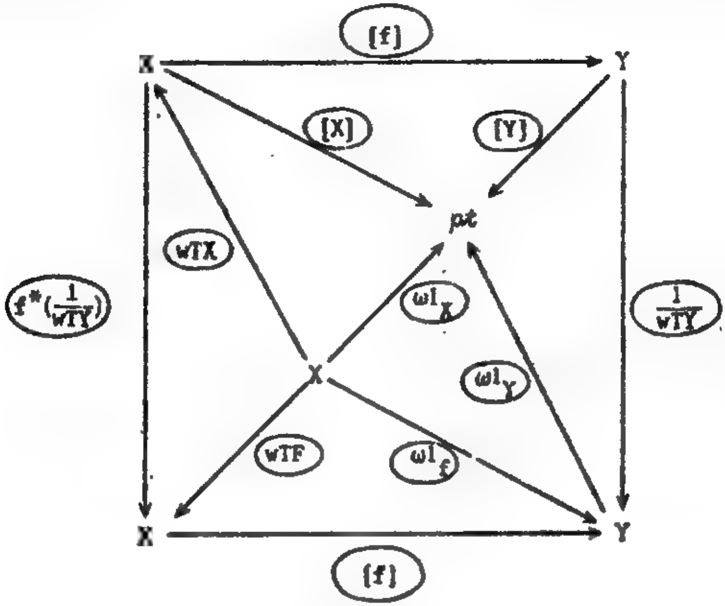
обозначаемое через TF.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6А. Если отображение $f : X \to Y$ гладко, то $\omega(1_f) = w(TF) \cdot [f]$, где

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, "{[f]}"] & \\ X \arrow[ur, "w(TF)"] \arrow[rr, "\omega(1_f)"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Доказательство. Вначале докажем наше предложение в предположении, что Y (а потому и X) является многообразием. Для этого достаточно проверить равенство $\omega(1_f) \cdot \omega(1_Y) = w(TF) \cdot [f] \cdot \omega(1_Y)$, так как $\cdot\, \omega(1_Y)$ – изоморфизм. Это равенство получается из рассмотрения следующей диаграммы, в которой все

треугольники, кроме нужного нам, заведомо задают произведения (а равенство произведений элементов, стоящих по краю диаграммы, вытекает из коммутативности умножения):



Для завершения доказательства нам потребуется хорошо известная лемма.

ЛЕММА. <u>Для любого пространства</u> Y <u>имеется вложение</u> $Y \xrightarrow{i} N$ <u>в некоторое многообразие</u> N, <u>допускающее ретракцию</u> $r: N \to Y$, <u>где</u> $r \circ i = id_Y$.

Нужное многообразие N получается удвоением (два экземпляра склеиваются по границе) регулярной окрестности пространства Y, при любом вложении Y в какое-либо многообразие.

Теперь для произвольного гладкого морфизма $X \xrightarrow{f} Y$ образуем квадрат

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "i"] & N
\end{tikzcd}$$

где M – расслоенное произведение $X \xrightarrow{f} Y$ и $N \xrightarrow{g} Y$. Формула для M и N после перехода к обратным образам дает формулу для X и Y.

6.3.2. Теорема Вердье-Римана-Роха. Как указывалось в § 2.7, коль скоро имеются преобразования Гротендика, например из теоремы 6А, и формула Римана-Роха, например из предложения 6А, мы получаем теорему Вердье-Римана-Роха. В нашем случае это

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6В. Если $f: X \to Y$ – гладкое отображение, то следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}_*(Y) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "f^!"'] & H_*(Y) \arrow[d, "w(TF) \cap f^!"] \\ \mathbb{F}_*(X) \arrow[r] & H_*(X) \end{tikzcd}$$

(Отметим, что $f^! \alpha = \alpha \circ f$.)

Аналогично получается SGA-6 – теорема Римана-Роха, однако ввиду простоты когомологий $\mathbb{F}^*$ она неинтересна.

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложение 6В остается справедливым (после замены $w(TF)$ на $(w N_f)^{-1}$) и для нормально неособых отображений $f: X \to Y$ пространств Эйлера. Доказывать это, однако, приходится по-другому (см. § 10.7). Это обобщение предложения 6В важно, поскольку оно характеризует гомологический класс Уитни с точностью до его нормировки на точке. А именно:

Каждому $\mathrm{mod}\, 2$ – пространству Эйлера X можно сопоставить единственный класс $w_*(X) \in H_*(X)$, такой что

1) $w_*(pt) \neq 0$;

2) для всех нормально неособых отображений $f: X \to Y$ выполняется равенство $w_*(X) = [w(N_f)]^{-1} \frown f^! w_*(Y)$.

Мы опустим доказательство этого утверждения, использующее теорию кобордизмов.

6.3.3. Специализация. В настоящем пункте мы получим формулу для специализации класса $\omega(\alpha)$ на общий слой как результат применения преобразования ω к некоторой ассоциированной конструктивной функции, обозначаемой $\rho_y(\alpha)$, на специальном слое. При этом мы следуем работе Вердье ([Ve_4]), посвященной специализации классов Чженя.

Рассмотрим отображение $f: X \to Y$, точку $y_0 \in Y$, слой

$X_0 = f^{-1}(y_0)$ над которой называется специальным слоем, и элемент $\alpha \in \mathbb{F}(X\setminus f^{-1}(y_0) \to Y\setminus\{y_0\})$, являющийся конструктивной функцией на всём X.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\gamma : [0,1] \to Y$ отображает 0 в y_0, а $(0,1]$ в $Y\setminus\{y_0\}$. Существует единственный элемент из $\beta \in \mathbb{F}(X\times_Y [0,1] \to [0,1])$, который при ограничении на $(0,1]$ дает $\gamma^*(\alpha)$. Определим специализацию $\rho_\gamma(\alpha) \in \mathbb{F}_*(X_0) = \mathbb{F}(X_0 \to \{y_0\})$ элемента α как указанное ограничение элемента β.

Другими словами, $\rho_\gamma(\alpha)$ – это результат единственно возможного пополнения диаграммы, все квадраты в которой являются квадратами обратных образов:

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\rho_\gamma(\alpha)"] & X\times_Y[0,1] \arrow[d, "\beta"] & X\times_Y(0,1] \arrow[l, hook'] \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^*\alpha"] & X\setminus f^{-1}(y_0) \arrow[d, "\alpha"] \\
Y_0 \arrow[r, hook] & [0,1] & (0,1] \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\gamma"'] & Y\setminus\{y_0\}
\end{tikzcd}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Элемент α можно доопределять до элемента из группы $\mathbb{F}(X \to Y)$ тогда и только тогда, когда $\rho_\gamma(\alpha)$ не зависит от γ. В этом случае $\rho_\gamma(\alpha)$ есть продолжение функции α на слой X_0.

Если дополнительно потребовать, чтобы $X\times_Y(0,1] \to (0,1]$ было расслоением, то определена специализация в гомологиях

$$\sigma_\gamma : H_*(X_1) \to H_*(X_0),$$

где $X_1 = f^{-1}(y_1)$ для $y_1 = \gamma(1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6С. Имеет место равенство

$$\sigma_\gamma(\omega(i^*\alpha)) = \omega(\rho_\gamma(\alpha)),$$

где

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}_*(X_1) \arrow[d, "\omega"'] & \mathbb{F}(X\setminus X_0 \to Y\setminus\{y_0\}) \arrow[l, "i^*"'] \arrow[r, "\rho_\gamma"] & \mathbb{F}_*(X_0) \arrow[d, "\omega"] \\
H_*(X_1) \arrow[rr, "\sigma_\gamma"'] & & H_*(X_0)
\end{tikzcd}$$

Это непосредственно вытекает из результатов п. 3.4.4.

СЛЕДСТВИЕ. <u>Если</u> $f:X\to Y$ – <u>эйлерово отображение, то</u>

$$\sigma_f(w_*(X_1)) = w_*(X_0).$$

<u>§ 6.4. Доказательство единственности преобразования ω</u>

Для любого $f:X\to Y$ и любого $\alpha\in \mathbb{F}(X\to Y)$ мы построим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d] & M \arrow[l, "p"'] \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "i"] & N \arrow[r] & pt
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

в которой M и N – многообразия, такую что

$$\alpha = i^*\beta,$$

где $\beta\in\mathbb{F}(Z\to N)$ – (единственное) решение уравнения

$$\beta\cdot 1_N = p_* 1_M .$$

Тогда из условия, наложенного в теореме 6A на преобразование ω вытекает, что

$$\omega(\alpha) = i^*(\omega(\beta)), \qquad (**)$$

где $\omega(\beta)$ — единственное решение уравнения

$$\omega(\beta)\cdot w(TN)\cdot[N] = p(w(TM)\cdot[M]); \quad (***)$$

решение этого уравнения единственно, поскольку отображения

$$\cdot w(TN): H(Z\to N)\to H(Z\to N)$$

и

$$\cdot[N] : H(Z\to N)\to H(Z\to N)$$

суть изоморфизмы (первое – ввиду обратимости элемента $w(TN)$ в $H^*(N)$).

Для построения этой диаграммы воспользуемся вложением и ретракцией

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, shift left, "i"] & N \arrow[l, shift left, "\pi"]
\end{tikzcd}$$

из леммы п. 6.3.1. Пусть Z есть $X \times_Y N$, а $\beta = r^*\alpha$.

Построим отображение $p: M \to Z$, такое что $p_* 1_M = \beta \cdot 1_N$, используя разрешение особенностей и отвинчивание. Предположим, что размерность носителя элемента β равна n. Выберем β-подогнанную триангуляцию T полиэдра Z, и пусть симплициальная n-мерная цепь Z_n задается суммой всех n-мерных симплексов Δ, на внутренностях которых β равно 1. Из локального условия Эйлера для $\beta \cdot 1_N \in F(Z \to pt)$ вытекает, что Z_n является циклом. Поэтому из теории кобордизмов следует существование многообразия M_n и отображения $g_n : M_n \to supp Z_k$, таких что $g_{n*}[M_n] = Z_n$ [Th]. Следовательно, размерность носителя функции

$$\beta - g_{n*} 1_{M_n}$$

не больше $n-1$. Теперь повторно применяем эту процедуру.

ЗАМЕЧАНИЕ. Любая диаграмма (*) задает $\omega(\alpha)$ посредством соотношений (**) и (***). Значит, это в некотором смысле построение ω. Но таких диаграмм много, и нужно показать, что все они дают согласованные значения для $\omega(\alpha)$. Вместо того чтобы проверять это непосредственно, мы строим ω в § 6.5 при помощи некоторой более канонической процедуры.

§ 6.5. Построение преобразования ω

В этом параграфе мы завершим доказательство теоремы 6А – докажем существование преобразования прямым комбинаторным построением "цикла", представляющего $\omega_i(\alpha)$, где $\omega_i(\alpha)$ – компонента класса $\omega(\alpha)$ из $H^{-i}(X \to Y)$. Моделью для данного построения служит комбинаторная формула для обычных классов Уитни [Whit, Ch, Ht]. Прежде всего надо исследовать, какие "циклы" могут представлять бивариантные гомологические классы. Это проделывается в п. 6.5.1.

<u>6.5.1. Псевдогладкие морфизмы.</u> В этом пункте мы определим класс канонически ориентированных отображений, называемых псевдогладкими морфизмами. Этот класс содержит гладкие отображения. Пространства, для которых отображение в точку является псевдогладким морфизмом, называются псевдомногообразиями – это самый общий класс естественно H-ориентированных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространство X называется <u>mod 2-псевдомногообразием размерности</u> i, если для некоторой (а следовательно, и любой) триангуляции

1) все симплексы разбиения полиэдра X имеют размерность $\leqslant i$;

2) каждый $(i-1)$-симплекс является гранью четного числа i-мерных симплексов.

Следующий классический факт легко проверить, например, используя симплициальные гомологии.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6D. Псевдомногообразие X размерности i имеет единственную ориентацию $[X]\in H_i(X)$, ограничение которой на группу $H_i(X, X\setminus\{p\})$ дает ненулевой элемент для всех $p\in X$, таких что $H_i(X, X\setminus\{p\})\neq\{0\}$.

Если отображение $f: X\to Y$ допускает триангуляцию, то относительной размерностью симплекса Δ в X назовем разность $\dim\Delta-\dim f(\Delta)$, т.е. размерность общих слоев отображения $\Delta\to f(\Delta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение $f: X\to Y$ называется (mod 2) i-псевдогладким морфизмом, если

1) $f^{-1}(y)$ является i-мерным псевдомногообразием для всех $y\in Y$;

2) для некоторой (а следовательно, и любой) триангуляции отображения f и всех симплексов Δ относительной размерности i разбиения полиэдра X выполняется приводимое ниже локальное условие четности.

Локальное условие четности на Δ. Для всех симплексов Δ' из Y, содержащих $f(\Delta)$, число симплексов из X относительной размерности i, содержащих Δ и отображающихся на Δ', нечетно.

Например, отображение, представленное на рис. 1, при ограничении на двумерный остов области определения дает псевдогладкое отображение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6E. Всякое псевдогладкое отображение $f: X\to Y$ имеет единственную ориентацию $[f]$, ограничение которой на слой $y\in Y$ с помощью расслоенного квадрата

$$\begin{tikzcd} f^{-1}y \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ y \arrow[r, hook] & Y \end{tikzcd}$$

есть $[f^{-1}(y)]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6F. *Ориентация* $[f]$, *описанная в предложении 6E, является канонической ориентацией, т.е.*

1) *если в коммутативном треугольнике*

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & Z \end{tikzcd}$$

f *есть* i-*псевдогладкий морфизм, а* g *есть* j-*псевдогладкий морфизм, то* $g\circ f$ *есть* $(i+j)$-*псевдогладкий морфизм и* $[g\circ f]=[f]\cdot[g]$;

2) *если в расслоенном квадрате*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

f *является* i-*псевдогладким морфизмом, то* f' – *также* i-*псевдогладкий морфизм и* $g^*[f]=[f']$.

Доказательство предложения 6E мы проведем индукцией по числу симплексов Δ разбиения полиэдра Y, добавляя симплексы в порядке возрастания размерностей. Пусть теорема уже доказана для отображения $f^{-1}(Y')\to Y'$. Чтобы доказать ее для отображения $f^{-1}(Y'\cup\Delta)\to Y'\cup\Delta$, воспользуемся точной последовательностью Майера – Вьеториса

$$\begin{array}{c} H^{-i-1}(f^{-1}(Y'\cap\Delta)\longrightarrow Y'\cap\Delta)=0 \\ \big\downarrow \\ H^{-i}(f^{-1}(Y'\cup\Delta)\longrightarrow Y'\cup\Delta) \\ \big\downarrow \\ H^{-i}(f^{-1}(Y')\longrightarrow Y')\oplus H^{-i}(f^{-1}(\Delta)\longrightarrow\Delta) \\ \big\downarrow \\ H^{-i}(f^{-1}(Y'\cap\Delta)\longrightarrow Y'\cap\Delta) \end{array}$$

Если $g:\{p\}\to\Delta$ – вложение точки во внутренность симплекса Δ, то гомоморфизм

$$H^{-i}(f^{-1}(\Delta)\to\Delta)\xrightarrow[g^*]{}H^{-i}(f^{-1}(p)\to\{p\})$$

является изоморфизмом. Условие локальной чётности на крае симплекса Δ эквивалентно тому, что образы классов

$$[f^{-1}(Y')\to Y'],\ g^{*-1}[f^{-1}(p)]$$

в $H^{-i}(f^{-1}(Y'\cap\Delta)\to Y'\cap\Delta)$ одинаковы.

Для доказательства предложения 6F заметим, что класс $[X\to Y]$ можно охарактеризовать так: каково бы ни было $Y'\subset Y$, класс $[X\to Y]$ ограничивается до класса $[X'\to Y']$, где X' – множество точек, таких что $f|_{X'}:X\to Y'$ – гладкое отображение, размерность слоя которого равна i. (Отметим, что введенное здесь ограничение не является бивариантным обратным образом!) Поэтому каноничность псевдогладких морфизмов следует из каноничности гладких отображений.

<u>6.5.2. Псевдогладкое отображение, представляющее класс $\omega_i(\alpha)$.</u> Предположим, что заданы произвольное отображение $f:X\to Y$ и произвольное $\alpha\in F(f)$. Построим i-псевдогладкое отображение $f_i:X_i(\alpha)\to Y$ следующим образом. Выберем триангуляции T и $\overline{T}$ полиэдров X и Y так, чтобы триангуляция T была α-подогнана, а f было симплициальным. Обозначим через $X_i(\alpha)\subset X$ объединение всех симплексов Δ барицентрического подразделения T' разбиения T, для которых

1) функция α равна 1 на внутренности Δ;
2) Δ имеет относительную размерность i.

Рис. 2 иллюстрирует построение $X_0(1)$ для расслоения над окружностью, задаваемого "бутылкой Клейна".

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6G. <u>Пусть $f_i:X_i(\alpha)\to Y$ – описанное выше ограничение отображения f. Тогда f_i является i-псевдогладким морфизмом.</u>

Этот результат выводится из локального условия Эйлера стандартным комбинаторным рассуждением.

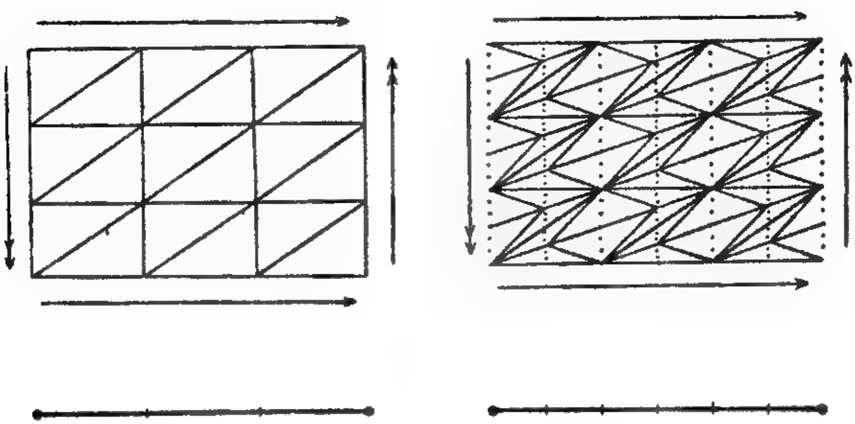


Рис. 2

ТЕОРЕМА 6В. $\omega_i(\alpha) = g_{i*}([f_i])$, где

$$\begin{tikzcd} X_i(\alpha) \arrow[rr, "g_i"'] \arrow[dr, "{[f_i]}"', "f_i"] & & X \arrow[dl, "f"'] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Иначе говоря, $\omega = \sum_i \omega_i$ удовлетворяет условиям теоремы 6А.

ЗАМЕЧАНИЕ. Убедиться в независимости классов $g_{i*}[f_i]$ от выбора триангуляций T и $\overline{T}$ можно, рассмотрев эти триангуляции на концах цилиндров $X\times[0, 1]$ и $Y\times[0, 1]$ и построив соответствующие триангуляции для отображения $f\times id : X\times[0,1] \to Y\times[0,1]$, продолжающие триангуляции на концах цилиндров.

Доказательство теоремы 6В. Выполнение условия нормировки на многообразиях из теоремы 6А для конструкции теоремы 6В доказано в $[HT_1]$. Мы опускаем проверку того, что построенное ω сохраняет произведения, прямые образы и обратные образы. Отметим только, что это выполняется даже на уровне цепей. Например, в формуле

$$\omega_n(f\cdot g) = \sum_{i+j=n} \omega_i(f)\cdot\omega_j(g)$$

сумма соответствует разложению симплексов относительной размерности n, на которых $f \circ g$ равно 1, по симплексам, соответствующим f, меньшей относительной размерности. Этот факт интересен, поскольку в комбинаторном доказательстве двойственности Уитни для $\mathcal{X}$-произведений, данном в $[HT_a]$, используются сложные гомологии. (О двойственности Уитни для циклов в другом контексте см. [BM].)

§ 6.6. Приложения (комбинаторная формула для класса Уитни векторного расслоения, трансфер)

6.6.1. Комбинаторная формула для класса Уитни векторного расслоения. Пусть X и Y – многообразия размерностей n и p соответственно и $f:X\to Y$ – гладкое отображение (см. п. 6.3.1). Классический i-й класс Уитни $w^i(TF)$ касательного расслоения к слоям лежит в группе когомологий $H^i(X)$, а поэтому двойственный по Пуанкаре класс $Dw^i(TF)$ лежит в $H_{n-i}(X)$. Нам хотелось бы найти явное выражение для этого класса как симплициального цикла.

Выберем такие триангуляции T и $\bar{T}$ полиэдров X и Y, чтобы отображение f было симплициальным, и пусть T' и $\bar{T}'$ – согласованные барицентрические подразделения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6Н. Класс гомологий $Dw^i(TF)$ задается суммой всех $(n-i)$-мерных симплексов разбиения T', которые проектируются на p-мерные симплексы разбиения $\bar{T}'$.

Это немедленно следует из предложения 6А и теоремы 6В.

Взяв в качестве X пространство векторного расслоения E над Y, получим формулу для двойственных классов Уитни расслоения E не в группе $H_*(Y)$, а в изоморфной группе $H_*(X)$ (и те и другие – гомологии с замкнутыми носителями). Эта ситуация напоминает ситуацию, возникшую в работе $[Mac_2]$, где аналогичная комбинаторная формула была доказана для утолщения исходного пространства.

6.6.2. Трансфер. Рассмотрим расслоение $f:X\to Y$, слоем которого служит mod 2-эйлерово пространство. Тогда $\omega_0(1_f)$ является его канонической ориентацией. Можно проверить, что соответствующие отображения Гизина оказываются обычными трансферами в mod 2-гомологиях. (В терминах гл. 5 это трансферы, соответствующие тождественному отображению X в себя.) Поскольку $\omega_0(1_f)$ является канонической ориентацией для любого эйлерова отображе-

ния f, получается обобщение трансфера на случай эйлеровых отображений. Такое обобщение действительно дает новые трансферы, например потому, что эйлеровы отображения часто не являются морфизмами Дольда (см. § 5.3).

Этот трансфер имеет аналог в целочисленных гомологиях; для его построения надо ввести целочисленный аналог локального условия Эйлера. Нам, однако, неизвестно, имеется ли такой аналог в обобщенных теориях когомологий.

Глава 7

ДВОЙСТВЕННОСТЬ ГРОТЕНДИКА И ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКТОРЫ

Двойственность Серра – Гротендика для когерентных пучков естественно интерпретировать как преобразование Гротендика бивариантных теорий (§ 7.1). Эта новая точка зрения наводит на мысль о связи двойственности с теоремой Римана – Роха. Получаемая в § 7.2 формула обобщает хорошо известную формулу

$$\sum(-1)^i \dim H^i(X,\mathcal{O}_X) = (-1)^n \sum(-1)^i \dim H^i(X,\Omega^n_X) \qquad (1)$$

на многообразия с особенностями и классы высших размерностей.

Применение двойственности Вердье позволяет получить еще одну бивариантную теорию гомологий $\mathbb{H}$ в топологии (§ 7.3), которая более удобна для выделения сильно ориентируемых отображений. Аналогичный язык приводит к построению бивариантной теории в алгебраической геометрии, ассоциированные с которой контравариантная и ковариантная теории являются этальными когомологиями и гомологиями (§ 7.4).

§ 7.1. Двойственность Гротендика

7.1.1. Для простоты мы ограничимся категорией квазипроективных схем над полем; по-видимому, всё нижеизложенное обобщается на категорию конечномерных нётеровых схем с морфизмами локально-

конечного типа (см. приложение Делиня к $[Ha_1]$). Ограниченными морфизмами в этой категории будем считать собственные морфизмы, а независимыми квадратами

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y' \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

пусть будут Tor-независимые расслоенные квадраты ($\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{Y'}) = 0$ для $i>0$).

Каждому морфизму $f: X \to Y$ сопоставим

$$\mathbb{K}(X \xrightarrow{f} Y)$$

– производную (триангулированную) категорию f-совершенных комплексов на X. Объектами этой категории являются f-совершенные комплексы пучков $\mathcal{O}_X$-модулей, которые обсуждаются в § 2.1 ч.II, но морфизмы локализованы так, чтобы любой квазиизоморфизм комплексов был изоморфизмом в производной категории (см. [SGA-6, гл. III, § 4.2], где эта категория обозначена через $D(f)_{parf}$, а также $[Ha_2]$). Все конструкции, проведенные в § 1.1 ч. II для K_{alg}, в действительности определены на $\mathbb{K}$, превращают $\mathbb{K}$ в бивариантную теорию (со значениями в некоторой неабелевой категории) и дают каноническое преобразование Гротендика из $\mathbb{K}$ в K_{alg}.

7.1.2. Имеется "наивная" двойственность векторных расслоений, сопоставляющая векторному расслоению E двойственное расслоение $E^\vee$. Поскольку расслоению E соответствует элемент из $\mathbb{K}(X \xrightarrow{id} X)$, естественно попытаться найти преобразование Гротендика

$$D: \mathbb{K} \to \mathbb{K},$$

продолжающее эту двойственность для расслоений. Пусть дан морфизм $f: X \to Y$. Для любого f-совершенного комплекса $\mathcal{A}^\cdot$ на X положим

$$D(\mathcal{A}^\cdot) = D_f(\mathcal{A}^\cdot) = R\underline{Hom}_X(\mathcal{A}^\cdot, f^! \mathcal{O}_Y). \qquad (3)$$

Здесь $f^!$ обозначает подкрученный функтор взятия обратного образа из производной категории ограниченных снизу комплексов $\mathcal{O}_Y$-модулей в производную категорию ограниченных снизу комплек-

сов $\mathcal{O}_X$-модулей, построенный Гротендиком, Хартсхорном и Делинем [Ha_1]. Более точно, разложим f в композицию замкнутого вложения $i: X \to P$ и гладкого морфизма $p: P \to Y$ относительной размерности n. Обозначим через $\mathcal{J}$ инъективную резольвенту пучка $\Omega^n_{P/Y}$ относительных n-форм. Тогда пучок идеалов схемы X аннулирует комплекс $\underline{Hom}_P(\mathcal{A}^\cdot, \mathcal{J}^\cdot)$ на P, и, следовательно, этот комплекс определяет некоторый комплекс $\mathcal{O}_X$-модулей, обозначаемый через $\underline{Hom}_P(\mathcal{A}^\cdot, \mathcal{J}^\cdot)^\sim$. Этот последний комплекс с точностью до сдвига градуировки на n единиц влево представляет $D_f \mathcal{A}^\cdot$, т.е.

$$D_f(\mathcal{A}^\cdot) = R\underline{Hom}(\mathcal{A}^\cdot, \Omega^n_{P/Y}[n])^\sim. \tag{4}$$

Согласованность приведенных двух определений вытекает из соотношений $f^! \mathcal{O}_Y = i^! p^! \mathcal{O}_Y$, $p^! \mathcal{O}_Y = \Omega^n_{P/Y}[n]$ и изоморфизма двойственности для замкнутых вложений ([Ha_1, с. 173]).

Отметим, что для тождественного морфизма f схемы X в себя $f^! \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X$, и если $\mathcal{E}^\cdot$ – ограниченный комплекс локально-свободных пучков на X, то $D(\mathcal{E}^\cdot)$ есть двойственный комплекс $\mathcal{E}^{\cdot\vee} = \underline{Hom}_X(\mathcal{E}^\cdot, \mathcal{O}_X)$.

<u>7.1.3.</u> ПРЕДЛОЖЕНИЕ. <u>Если $\mathcal{A}^\cdot$ является f-совершенным комплексом, то комплекс $D_f(\mathcal{A}^\cdot)$ также f-совершенен, а индуцированное преобразование</u>

$$D: K \to K$$

<u>является преобразованием Гротендика бивариантных теорий. Кроме того, $D \circ D$ – тождественное преобразование.</u>

<u>Доказательство.</u> f-совершенность комплекса $D_f(\mathcal{A}^\cdot)$ и равенство $D_f D_f(\mathcal{A}^\cdot) = \mathcal{A}^\cdot$ доказаны в [SGA-6, с. 258 – 259]. Пусть $f: X \to Y$ – собственный морфизм, а $g: Y \to Z$ – произвольный морфизм. Тогда перестановочность D с прямыми образами эквивалентна изоморфизму двойственности

$$Rf_*(R\underline{Hom}_X(\mathcal{A}^\cdot, f^!\mathcal{B}^\cdot)) = R\underline{Hom}_Y(Rf_*\mathcal{A}^\cdot, \mathcal{B}^\cdot) \tag{5}$$

([Ha_1, с. 210]) для комплекса $\mathcal{B}^\cdot = g^! \mathcal{O}_Z$. Доказательство перестановочности D со взятием обратных образов и произведений мы опустим; используемые при этом методы аналогичны методам работы [Ha_1].

<u>7.1.4.</u> ЗАМЕЧАНИЯ. Хотя сформулированное утверждение не содержит изоморфизм двойственности (5) в полном объеме, оно включает

в себя обычную двойственность Серра – Гротендика. Если f отображает X в точку, то $D_f(\mathcal{O}_X)=f^!(k)=\omega_X^\cdot$ является дуализирующим комплексом на X. Если схема X проективна, то перестановочность D и f_* следует из изоморфизма двойственности

$$R\Gamma(X,\mathcal{A}^\cdot)^\vee = R\underline{Hom}(\mathcal{A}^\cdot,\omega_X^\cdot). \tag{6}$$

Если X – схема Коэна – Маколея размерности n, то $\omega_X^\cdot=\omega_X[n]$ для пучка ω_X на X, и, переходя в (6) к гомологиям, получаем двойственность Гротендика

$$H^i(X,\mathcal{A})=\mathrm{Ext}^{n-i}(\mathcal{A},\omega_X) \tag{7}$$

для когерентного пучка $\mathcal{A}$ на X. Если пучок $\mathcal{A}$ локально-свободен, то в правой части равенства (7) стоит группа $H^{n-i}(X,\mathcal{A}^\vee\otimes\omega_X)$, а если схема X неособа, то $\omega_X=\Omega_X^n$, и мы возвращаемся к двойственности Серра.

Перестановочность D со взятием обратных образов означает, в частности, что $D_{f'}(\mathcal{O}_{X'})=\mathbb{L}g'^*D_f(\mathcal{O}_X)$ для Tor-независимых квадратов (2) (ср. [Ve_3]). Из перестановочности D с произведениями для диаграмм $X\xleftarrow{f} Y\to pt$ вытекает, что $\omega_X^\cdot=D_f(\mathcal{O}_X)\otimes\mathbb{L}f^*\omega_Y^\cdot$; в частности, дуализирующим комплексом декартова произведения является тензорное произведение дуализирующих комплексов сомножителей.

§ 7.2. Двойственность и формула Римана – Роха

7.2.1. Пусть $\widetilde{H}^i(X\to Y)=H^{2i}(X\to Y)\otimes\mathbb{Q}$ – четная часть бивариантной теории сингулярных гомологий с рациональными коэффициентами. Рассмотрим преобразование Гротендика $D:\widetilde{H}\to\widetilde{H}$, действующее на группах $\widetilde{H}^i$ как умножение на $(-1)^i$.

Пусть $\tau:\mathbb{K}\to\widetilde{H}$ – преобразование Гротендика, описанное ниже в ч. II. Точнее, τ является композицией канонического преобразования $\mathbb{K}\to K_{alg}$ с введенным там преобразованием

7.2.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Диаграмма преобразований

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \xrightarrow{\tau} & \widetilde{H} \\ {\scriptstyle D}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D} \\ \mathbb{K} & \xrightarrow{\tau} & \widetilde{H} \end{array} \tag{8}$$

коммутативна.

Доказательство. Обычным способом дело сводится к рассмотрению замкнутых вложений $f: X \to Y$, а для вложений коммутативность указанной диаграммы следует из двух простых фактов:

(i) Если $\mathcal{A}^{\cdot}$ является f-совершенным комплексом на X, а $\mathcal{E}^{\cdot}$ – ограниченной локально-свободной резольвентой комплекса $\mathcal{A}^{\cdot}$ на Y, то $\mathcal{E}^{\cdot\vee}$ будет резольвентой комплекса $D_f(\mathcal{A}^{\cdot})$.

(ii) Если $\mathcal{E}^{\cdot}$ – комплекс векторных расслоений над Y, точный вне X, то

$$ch_i(\mathcal{E}^{\cdot\vee}) = (-1)^{2i} ch_i(\mathcal{E}^{\cdot}) \in H^{2i}(Y, Y\setminus X; \mathbb{Q}).$$

7.2.3. СЛЕДСТВИЕ. Для произвольного когерентного пучка $\mathcal{A}$ на квазипроективной схеме X справедливо равенство

$$\tau_i(R\,\underline{Hom}_X(\mathcal{A}, \omega_X^{\cdot})) = (-1)^i \tau_i(\mathcal{A}) \tag{9}$$

в $H_{2i}(X)\otimes\mathbb{Q}$. В частности, для всякой n-мерной схемы Коэна – Маколея X

$$\tau_i(\omega_X) = (-1)^{n-i}\, td_i(X), \tag{10}$$

где $td_*(X) = \tau_*(\mathcal{O}_X)$ – гомологический класс Тодда схемы X.

7.2.4. ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Приведенные выше формулы со значениями в группе циклов по модулю рациональной эквивалентности справедливы над произвольным основным полем (доказательства те же).

2. Так как функтор τ пропускается через четную часть K_{top} топологической K-теории ($\tau = ch\circ\alpha$), то должно существовать преобразование Гротендика $D: \tilde{K}_{top} \to \tilde{K}_{top}$, дающее коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "D"'] & \tilde{K}_{top} \arrow[r, "ch"] \arrow[d, "D"'] & \tilde{H} \arrow[d, "D"'] \\
\mathbb{K} \arrow[r, "\alpha"] & \tilde{K}_{top} \arrow[r, "ch"] & \tilde{H}
\end{tikzcd} \tag{11}$$

Для отображения $f: X \to Y$ это преобразование задается так: выберем поднятие f до отображения в $Y\times\mathbb{C}^n$, при котором осуществляется отождествление группы $\tilde{K}_{top}(X\to Y)$ с группой $K^0(Y\times\mathbb{C}^n, Y\times\mathbb{C}^n\setminus X)$; тогда для любого комплекса $\mathcal{E}^{\cdot}$ векторных расслоений над $Y\times\mathbb{C}^n$, точного вне X, $D_f[\mathcal{E}^{\cdot}] = (-1)^n[\mathcal{E}^{\cdot\vee}]$.

§ 7.3. Гомологии производных функторов

7.3.1. Пусть $\mathcal{C}$ – категория всех локально-компактных пространств с морфизмами конечной когомологической размерности [Ve$_1$]. Все собственные отображения будем считать ограниченными, а все расслоенные квадраты – независимыми. Зафиксируем нётерово кольцо A и обозначим через A_X постоянный пучок A на пространстве X. Положим

$$\begin{aligned} H^i(X \xrightarrow{f} Y) &= R^i \underline{\mathrm{Hom}}(Rf_! A_X, A_Y) \\ &= R^i \underline{\mathrm{Hom}}(A_X, f^! A_Y) \\ &= H^i(X, f^! A_Y). \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $f_!$ обозначает прямой образ с компактным носителем (из пучков A-модулей на X в пучки A-модулей на Y), $Rf_!$ – соответствующее отображение производных категорий, а $f^!$ – сопряженный функтор [Ve$_1$]. Для диаграммы $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ произведение задается композицией гомоморфизмов:

$$\begin{tikzcd} R^i\mathrm{Hom}(Rf_! A_X, A_Y) \otimes R^j\mathrm{Hom}(Rg_! A_Y, A_Z) \arrow[d, "Rg_! \otimes \mathrm{id}"] \\ R^i\mathrm{Hom}(Rg_! Rf_! A_X, Rg_! A_Y) \otimes R^j\mathrm{Hom}(Rg_! A_Y, A_Z) \arrow[d, "\text{композиция}"] \\ R^{i+j}\mathrm{Hom}(Rg_! Rf_! A_X, A_Z) \end{tikzcd}$$

Если f – собственное отображение, то $f_! = f_*$. Канонический изоморфизм $f^* A_Y \to A_X$ сопряжен с гомоморфизмом $A_Y \to Rf_* A_X = Rf_! A_X$. Этот последний задает прямой образ

$$R^i \underline{\mathrm{Hom}}(Rg_! Rf_! A_X, A_Z) \to R^i \underline{\mathrm{Hom}}(Rg_! A_Y, A_Z).$$

Для произвольного расслоенного квадрата

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

имеется канонический изоморфизм замены базы [Ve$_1$]

$$Rf'_!(A_{X'}) = Rf'_!(g'^*A_X) \cong g^*Rf_!(A_X).$$

Обратный образ задается композицией

$$R^i\underline{\mathrm{Hom}}(Rf_!A_X, A_Y) \xrightarrow{g^*} R^i\underline{\mathrm{Hom}}(g^*Rf_!(A_X), g^*A_Y)$$

$$\cong R^i\,\underline{\mathrm{Hom}}(Rf'_!(A_{X'}), g^*A_{Y'}) = R^i\underline{\mathrm{Hom}}(Rf'_!(A_{X'}), A_{Y'}).$$

Проверку аксиом бивариантной теории предоставляем читателю.

7.3.2. Пусть $f: X \to Y$ – отображение локально-компактных пространств. Рассмотрим $f^!A_Y$ как комплекс инъективных пучков на X. Поскольку

$$H^{-n}(X \xrightarrow{f} Y) = R^{-n}\underline{\mathrm{Hom}}(A_X, f^!A_Y) = R^0\underline{\mathrm{Hom}}(A_X[n], f^!A_Y),$$

существует взаимно-однозначное соответствие между гомоморфизмами $c: A_X[n] \to f^!A_Y$ комплексов и элементами $\bar{c}$ из $H^{-n}(X \xrightarrow{f} Y)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Отображение $f: X \to Y$ допускает сильную ориентацию тогда и только тогда, когда комплекс $f^!A_Y$ квазиизоморфен комплексу $A_X[n]$.

Мы называем такие отображения гомологически нормально неособыми.

Доказательство. Если c – изоморфизм, то для всех $h: W \to X$ умножение на $\bar{c}$ есть изоморфизм

$$H^i(W \xrightarrow{h} X) = H^i(W, h^!A_X) = H^{i-n}(W, h^!A_X[n])$$

$$\xrightarrow{c_*} H^{i-n}(W, h^!f^!A_Y) = H^{i-n}(W \xrightarrow{fh} Y). \qquad (13)$$

Обратно, если отображение (13) является изоморфизмом для всех замкнутых подпространств W в X, то индуцированные гомоморфизмы локальных групп когомологий

$$H^j_W(X, A_X[n]) \xrightarrow{c_*} H^j_W(X, f^! A_Y)$$

будут изоморфизмами для всех W, j. Отсюда следует, что c является квазиизоморфизмом комплексов. Это становится очевидным, если перейти к конусу над c и заметить, что ацикличность комплекса $F^\cdot$ на X следует из обращения в нуль локальных групп когомологий $H^j_W(X, F^\cdot)$ для всех j и всех замкнутых подпространств W в X.

7.3.3. СЛЕДСТВИЕ (изоморфизм Тома). *Пусть $p: E \to Y$ - ориентированное $\mathbb{R}^n$-расслоение над Y, $s: X \to E$ - непрерывное отображение и $f = p \circ s$. Тогда имеют место канонические изоморфизмы*

$$H^i(X \xrightarrow{f} Y) \cong H^{i+n}(X \xrightarrow{s} E). \qquad (14)$$

Доказательство. Ориентация на расслоении E задает изоморфизм комплекса $p^! A_Y$ с комплексом $A_E[n]$ (ср.[Iv]).

7.3.4. СЛЕДСТВИЕ. *На подкатегории категории $\mathscr{C}$, состоящей из пространств, допускающих вложение в евклидово пространство, определенная выше теория H совпадает с построенной в гл. 3 топологической теорией.*

Доказательство. Для всякого замкнутого вложения $f: X \to Y$ группа

$$R^i \underline{Hom}(Rf_! A_X, A_Y) = R^i \underline{Hom}(f_* A_X, A_Y)$$

есть локальная группа когомологий пространства Y с носителями на X, изоморфная группе когомологий Чеха $\check{H}^i(Y, Y \setminus X; A)$. В общем случае отображение f представляется с помощью вложения в $Y \times \mathbb{R}^n$, и для завершения доказательства остается воспользоваться предложением 7.3.2 для тривиального векторного расслоения

§ 7.4. Этальная теория

7.4.1. Фиксируем целое положительное число n и положим $A = \mathbb{Z}/n$. Для простоты[1] возьмем в качестве лежащей категории

---

[1] Все приводимые ниже конструкции обобщаются на произвольные квазикомпактные квазиотделимые схемы, для которых элемент обратим, и произвольные компактифицируемые морфизмы.

$\mathcal{C}$ категорию квазипроективных схем над алгебраически замкнутым полем, характеристика которого взаимно проста с n. Ограниченными морфизмами пусть будут собственные морфизмы, а независимыми квадратами – расслоенные квадраты. Функторы $Rf_!$ и $Rf^!$, свойства которых аналогичны свойствам аналогичных функторов $Rf_!$ и $Rf^!$ из § 7.3, построены в [SGA-4, гл. XVII, XVIII], и можно, как и раньше, положить

$$H^i_{et}(X \xrightarrow{f} Y) = R^i Hom(Rf_! A_X, A_Y) = H^i(X, Rf^! A_Y). \qquad (15)$$

Произведения, прямые и обратные образы определяются так же, как и в § 7.3.

7.4.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (двойственность). Пусть $g: Y \to Z$ – гладкий морфизм относительной размерности d. Тогда для всех морфизмов $f: X \to Y$ определены канонические изоморфизмы

$$H^i_{et}(X \xrightarrow{gf} Z) \cong H^{i+2d}_{et}(X \xrightarrow{f} Y)(d); \qquad (16)$$

здесь через (d) обозначено тензорное произведение на $\mu_n^{\otimes d}$, где μ_n – группа корней n-й степени из единицы.

Доказательство. Это предложение, аналогично предложению из п. 7.3.2, устанавливается с помощью канонического изоморфизма

$$Rg^! A_Z = A_Y(d)[2d],$$

доказанного в [SGA4, гл. XVIII, п. 3.2.5].

7.4.3. Для четных групп мы можем "встроить" в определение этальных когомологий сдвиг Тэйта. А именно, положим

$$\widetilde{H}^i_{et}(X \xrightarrow{f} Y) = R^{2i}\ Hom(Rf_! A_X, A_Y[i]).$$

Получается коммутативная теория $\widetilde{H}$, и теперь каждый гладкий морфизм $g: Y \to Z$ относительной размерности d имеет сильную ориентацию в $\widetilde{H}^{-d}_{et}(Y \xrightarrow{g} Z)$. Изоморфизм двойственности является обратным к умножению на элемент, задаваемый этой сильной ориентацией.

7.4.4. Методы работы [BFM$_1$] показывают, что морфизмы локально-полного пересечения $f: X \to Y$ относительной размерности d

комплексных квазипроективных многообразий имеют канонические ориентации в $H^{-2d}_{et}(X \longrightarrow Y)$ (см. ч. II). Аналогично конструкция гомоморфизмов Гизина [DV, гл. VIII] в действительности приводит к каноническим ориентациям в $H^{-d}_{et}(X \xrightarrow{f} Y)$. Проблема определения канонических ориентаций для более широкого класса морфизмов обсуждается ниже в § 10.3.

7.4.5. Когомологии де Рама и функторы гомологий, введенные Гротендиком и Хартсхорном [Ho_2], по-видимому, объединяются в рамках бивариантной теории H_{DR}. Теория гомологий, предложенная Лабкиным, представляется подходящим кандидатом для построения p-адической бивариантной теории.

Глава 8

ОПЕРАЦИОННЫЕ ТЕОРИИ

Если T – бивариантная теория, а c – элемент группы $T(X \xrightarrow{f} Y)$, то для любого независимого квадрата

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array} \qquad (1)$$

элемент $g^*(c)$ из $T^i(X' \xrightarrow{f'} Y')$ задает гомоморфизмы Гизина

$$T_k(Y') \longrightarrow T_{k-i}(X') \qquad (2)$$

ассоциированных ковариантных групп (см. § 2.5).

В этой главе будет показано, как по произвольной ковариантной теории T_* построить бивариантную теорию C, называемую операционной теорией, в которой элемент из $C^i(X \xrightarrow{f} Y)$ задается набором гомоморфизмов (2). Это построение может оказаться полезным, если некая конструкция ковариантных групп не допускает аналогичного обобщения до конструкции бивариантных групп. В следующей главе мы применим это построение к теории рациональной эквивалентности в алгебраической геометрии, где имеется простое геометрическое описание ковариантных групп как групп циклов по модулю рациональной эквивалентности.

8.0.1. Пусть категория $\mathscr{C}$ допускает расслоенные произведения. Предположим также, что в $\mathscr{C}$ выделен класс морфизмов, называемых ограниченными, замкнутый относительно взятия композиции,

содержащий все тождественные морфизмы и замкнутый относительно замены базы: для любого расслоенного квадрата (1) из ограниченности f следует ограниченность f'.

Под <u>теорией гомологий</u> на категории $\mathcal{C}$ мы понимаем функтор T_*, сопоставляющий каждому объекту X категории $\mathcal{C}$ градуированную абелеву группу $T_*(X)$ и каждому ограниченному морфизму $f: X \to Y$ категории $\mathcal{C}$ – функториальные гомоморфизмы

$$f_* : T_i(X) \to T_i(Y). \tag{3}$$

Всякая теория гомологий T_* на категории $\mathcal{C}$ задает операционную бивариантную теорию C. Надлежащей категорией теории C служит категория $\mathcal{C}$, в которой все расслоенные квадраты считаются независимыми. Элементом c из $C^i(X \xrightarrow{f} Y)$ является, по определению, набор гомоморфизмов

$$c_{Y'} : T_k(Y') \to T_{k-i}(X') \tag{4}$$

для всех $k \in \mathbb{Z}$ и всех $g: Y' \to Y$, где $X' = Y' \times_Y X$ – расслоенное произведение. Требуется, чтобы эти гомоморфизмы были согласованными, т.е. если

$$\begin{tikzcd}
X'' \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "f''"] & X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y'' \arrow[r, "h"'] & Y' \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd} \tag{5}$$

– диаграмма расслоенных произведений, а h – ограниченный морфизм, то диаграммы

$$\begin{tikzcd}
T_k(Y'') \arrow[r, "c_{Y''}"] \arrow[d, "h'_*"'] & T_{k-i}(X'') \arrow[d, "h_*"] \\
T_k(Y') \arrow[r, "c_{Y'}"'] & T_{k-i}(X')
\end{tikzcd} \tag{6}$$

должны быть коммутативными.

Произведение в C определяется с помощью композиции: если $c \in C^i(X \xrightarrow{f} Y)$, $d \in C^j(Y \xrightarrow{g} Z)$, то

$$(c \cdot d)_{Z'} = c_{Y'} \circ d_{Z'} , \tag{7}$$

где $Y' = Z' \times_Z Y$. Прямой образ f_* из $C^i(X \xrightarrow{gf} Z)$ в $C^i(Y \xrightarrow{g} Z)$ для ограниченного морфизма $f: X \to Y$ задается формулой

$$f_*(c)_{Z'} = f'_* \circ c_{Z'} \tag{8}$$

здесь $c_{Z'}$ преобразует $T_k(Z')$ в $T_{k-i}(Z' \times_Z X)$, а f'_* – ковариантное отображение из $T_{k-i}(Z' \times_Z X)$ в $T_{k-i}(Z' \times_Z Y)$, индуцированное морфизмом $f' = id_{Z'} \times_Z f$.

Обратный образ g^* из $C^i(X \xrightarrow{f} Y)$ в $C^i(X' \xrightarrow{f'} Y')$ для расслоенного квадрата (1) определяется формулой

$$g^*(c)_{Y''} = c_{Y''}$$

для любого морфизма $Y'' \to Y'$. Проверка аксиом бивариантной теории не вызывает затруднений.

8.0.2. Предположим, что в $\mathscr{C}$ имеется финальный объект pt, а также что в $T_0(pt)$ выделен элемент 1. Тогда с бивариантной теорией C ассоциированы ковариантные группы $C_i(X) = C^{-i}(X \to pt)$, а формула $c \mapsto c_{pt}$ (1) определяет гомоморфизмы

$$C_i(X) \longrightarrow T_i(X),$$

которые задают естественное преобразование теорий гомологий $C_* \to T_*$. Операционная теория C – самая грубая из бивариантных теорий, которые можно связать с T_*, в следующем смысле: если для бивариантной теории F на $\mathscr{C}$ имеются гомоморфизмы из $F_i(X) = F^{-i}(X \to pt)$ в $T_i(X)$, ковариантные относительно ограниченных морфизмов и преобразующие $1 \in F^0(pt) = F_0(pt)$ в $1 \in T_0(pt)$, то существует единственное преобразование Гротендика $F \to C$ бивариантных теорий, такое что композиции ассоциированных гомоморфизмов $F_i(X) \to C_i(X)$ с гомоморфизмами (10) совпадают с заданными гомоморфизмами из $F_i(X)$ в $T_i(X)$.

8.0.3. Предположим, что задан набор $\mathscr{S}$ из элементов некоторых групп $C^i(X \to Y)$. Можно определить бивариантную теорию $C_{\mathscr{S}}$, потребовав, чтобы элементы из $C_{\mathscr{S}}$ коммутировали с элементами из $\mathscr{S}$. По определению, элемент c из $C^i(X \xrightarrow{f} Y)$ принадлежит

$C^i_{\mathscr{S}}(X \to Y)$, если для любой диаграммы

$$\begin{tikzcd} X'' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ Y'' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & Y \\ Z'' \arrow[r, "h"'] & Z' & \end{tikzcd} \tag{11}$$

расслоенных квадратов и любого элемента d из $C^j(Z' \xrightarrow{h} Z)$, принадлежащего $\mathscr{S}$, диаграмма

$$\begin{tikzcd} T_k(Y') \arrow[r, "c_{Y'}"] \arrow[d, "d_{Y'}"'] & T_{k-i}(X') \arrow[d, "d_{X'}"] \\ T_{k-j}(Y'') \arrow[r, "c_{Y''}"'] & T_{k-i-j}(X'') \end{tikzcd} \tag{12}$$

коммутативна для всех k. Поскольку это условие сохраняется при взятии произведений, прямых образов и обратных образов, множества $C_{\mathscr{S}}$ составляют бивариантную теорию. Элементы из $\mathscr{S}$ всегда определяют элементы из $C_{\mathscr{S}}$, если они коммутируют между собой.

Глава 9

РАЦИОНАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И ФОРМУЛЫ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

§ 9.1. Операционная теория рациональной эквивалентности

§ 9.2. Формулы пересечения

С недавних пор наблюдается возрождение интереса к теории пересечений на многообразиях с особенностями, прежде всего в связи с формулами кратной точки и другими проблемами вычислительной геометрии (см. [$K\ell_1$] и [FM_2]), а также в связи с изучением характеристических классов на многообразиях с особенностями (см., например, [BFM_1] и [LT]). Даже если основным предметом изучения являются неособые многообразия, и тогда требуется теория пересечений на особых многообразиях, например возникающих из схем двойных точек.

Наша непосредственная цель - показать, что бивариантные теории доставляют естественную область для формул пересечения. Преимущества бивариантного языка очевидны даже в неособом случае. К примеру, рассмотрим расслоенный квадрат из неособых комплексных многообразий

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

в котором f, f' - замкнутые вложения коразмерностей d, d'. Пусть $E = N_{f'}/g'^{*}N_f$ - факторрасслоение соответствующих нормальных расслоений и $e = d - d'$. Тогда справедлива хорошо извест-

ная формула
$$g^*f_*(a) = f'_*(c_e(E)\cdot g'^*(a)), \tag{1}$$
где $a\in H^*(X)=H_*(X)$; при $Y'=X$ это соотношение превращается в формулу самопересечения, а если Y' является раздутием Y вдоль X, то в формулу раздутия. Но отображение f задает класс $[f]$ из $H^d(Y, Y\setminus X)=H^d(X\xrightarrow{f}Y)$, и аналогично задается класс $[f']\in H^{d'}(X'\xrightarrow{f'}Y')$. Формула (1) является формальным следствием следующей корректной формулы, связывающей эти два класса ориентаций:
$$g^*[f]=c_e(E)\cdot[f']$$
в $H^d(X'\to Y')$. Эта же формула справедлива, когда f и f' являются всего лишь морфизмами локально-полных пересечений (см. п. 9.2.2). Выразить формулу (2) привлечения без бивариантного языка по меньшей мере затруднительно, поскольку в ней перемножаются $c_e(E)\in H^e(X'\xrightarrow{id}X')$ и $[f']$ из $H^{d'}(X'\to Y')$.

В алгебраической геометрии алгебраические циклы по модулю рациональной эквивалентности задают теорию гомологий, ковариантную относительно собственных отображений [Fu_1]. В этой главе мы строим соответствующую операционную теорию, основываясь на описанной в гл. 8 процедуре. Хотя это означает, что конечные результаты являются уравнениями в группах гомологий циклов по модулю рациональной эквивалентности, в операционной теории допускаются все формальные манипуляции с классами Чженя, произведениями, обратными образами и т.д., которые имели бы место и в более изощренной бивариантной теории (см. § 10.11); это и есть те "гомологические" уравнения, которые необходимы для применения теории пересечений. В одной формуле на бивариантном языке содержится целый ряд формул в гомологиях (см. § 9.2); предлагаемый подход позволяет усилить и объединить ранее полученные аналогичные результаты ([Lak, FL, FM_1]).

Отметим, что наши результаты имеют значительное перекрытие с результатами С. Клеймэна. Он также доказал ряд формул избытка пересечения и остаточного члена пересечения, причем зачастую его доказательства аналогичны нашим. Особенно полезное влияние оказала на нас его твердая уверенность в существовании обобщающей формулировки всего многообразия формул пересечения.

Поскольку нашей целью является иллюстрация преимуществ бивариантного языка для задач теории пересечений, доказательства

приводятся только тогда, когда они в идейном плане значительно отличаются от имеющихся в литературе ([FM_1], [DV, гл. IX], [Lak]). Необходимые обоснования, а также полные доказательства и обобщения этих результатов будут даны в [Fu_2].

§ 9.I. Операционная теория рациональной эквивалентности

9.I.I. Для простоты изложения в качестве низлежащей категории возьмем категорию квазипроективных схем над полем[1]. Ограниченными морфизмами пусть будут собственные морфизмы, а независимыми квадратами – расслоенные квадраты. Группа k-циклов по модулю рациональной эквивалентности на X обозначается через $A_k X$. Эти группы ковариантны относительно собственных морфизмов ([Fu_1, § I]). Поэтому процедура из гл. 8 приводит к операционной теории C. Чтобы уменьшить ее до более приемлемых размеров, рассмотрим набор $\mathscr{S}$, состоящий из элементов трех типов:

(i) Всякий плоский морфизм $f: X \to Y$ относительной размерности n определяет элемент из $C^{-n}(X \xrightarrow{f} Y)$, который мы обозначим через $[f]$. Для любого расслоенного квадрата

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd} \qquad (3)$$

гомоморфизм

$$[f]_{Y'}: A_k Y' \to A_{k+n} X'$$

является плоским обратным образом f'^* (см. [Fu_1, § I.6]): для каждого подмногообразия V' в Y' имеем $f'^*[V'] = [f'^{-1}(V')]$.

(ii) Всякое регулярное вложение (локально-полное пересечение) $f: X \to Y$ коразмерности d определяет элемент из $C^d(X \to Y)$, также обозначаемый через $[f]$. Для произвольного

---

[1]) Основная часть излагаемых ниже результатов справедлива в гораздо большей общности, например в категории универсальных цепных нётеровых схем и морфизмов конечного типа, при условии что соответствующие отображения разлагаются в композицию вложения и гладкого отображения (см. [FM_1], [Fu_2]). Как полагает Клейман, важная категория квазипроективных схем над дедекиндовой областью тоже обладает всеми нужными здесь свойствами.

диаграммы (3) гомоморфизм

$$[f]_{Y'} : A_k Y' \to A_{k-d} X'$$

преобразует цикл $[V']$, где V' – k-мерное подмногообразие в Y', в цикл пересечения $V' \cdot_g Y$, построенный в [FM_1, § 8]. (Если V' и Y имеют собственное пересечение, то $V' \cdot_g Y$ есть цикл пересечения, определенный Серром [Se]; в общем случае используется деформация к нормальному конусу.)

(iii) Для векторного расслоения E над схемой Y определены классы Чженя, обозначаемые через $c_i(E)$, в $C^i(Y \xrightarrow{id} Y)$. Для любого морфизма $g: Y' \to Y$ гомоморфизм

$$c_i(E)_{Y'} : A_k Y' \to A_{k-i} Y$$

преобразует класс a в $\frown$-произведение $c_i(g^*E) \frown a$. (Для квазипроективных схем $\frown$-произведение с классами Чженя определено, например, в [Fu_1]; для общего случая оно определено в [Fu_2].)

Определим операционную теорию рациональной эквивалентности A как бивариантную теорию $C_{\mathscr{S}}$ операций на A_*, коммутирующих с семейством $\mathscr{S}$ в указанном в гл. 8 смысле. Сами элементы из $\mathscr{S}$ коммутируют между собой (см. [DV, гл. IX], [Fu_2]) и потому определяют элементы из бивариантных групп, которые будут обозначаться теми же символами, что и в (i) – (iii).

9.1.2. Более общо, любой морфизм локально-полного пересечения (л.п.п.) $f: X \to Y$ коразмерности d задает класс $[f]$ в $A^d(X \to Y)$. Поскольку f можно представить как композицию регулярного вложения $i: X \to P$ коразмерности e и гладкого морфизма $p: P \to Y$ относительной размерности $e-d$, то, согласно (ii) и (i) соответственно, определены классы $[i] \in A^e(X \xrightarrow{i} P)$ и $[p] \in A^{d-e}(P \xrightarrow{p} Y)$. Положим $[f] = [i] \cdot [p]$. Доказательство независимости от выбора разложения, а также того, что эти классы $[f]$ являются каноническими ориентациями для морфизмов л.п.п. (в смысле § 2.6), проводится, как у Вердье [DV, гл. IX]; согласованность определенных в (i) и (ii) классов $[f]$ для плоских морфизмов л.п.п. доказана в [DV, п. IX.5.8].

ЗАМЕЧАНИЕ. Важной геометрической конструкцией, позволяющей эффективно использовать теорию пересечений, является деформация к нормальному конусу (см. [FM_1], [FM_2]). Построение графика

($[BFM_1]$, $[FM_1]$), частным случаем которого является эта конструкция, также приводит к классам из $A(X \to Y)$ для комплексов векторных расслоений над Y, точных вне X. Эти обобщения здесь не обсуждаются.

<u>9.1.3.</u> Следующее предложение показывает, что введенные операционные группы не так уж чрезмерно велики, как может показаться на первый взгляд.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. 1) <u>Для любой схемы</u> X <u>канонические гомоморфизмы</u>

$$A^{-i}(X \to pt) \to A_i X$$

<u>являются изоморфизмами.</u>

2) <u>Если</u> $f: X \to Y$ - <u>гладкий морфизм относительной размерности</u> n, <u>то класс</u> $[f]$ <u>является сильной ориентацией, т.е. для всех</u> $g: W \to X$ <u>гомоморфизмы</u>

$$A^i(W \xrightarrow{g} X) \xrightarrow{\cdot [f]} A^{i-n}(W \xrightarrow{fg} Y)$$

<u>суть изоморфизмы.</u>

СЛЕДСТВИЕ (двойственность Пуанкаре). <u>Если схема</u> X <u>неособа и имеет чистую размерность</u> n, <u>то гомоморфизмы</u>

$$A^i X \xrightarrow{\frown [X]} A_{n-i} X$$

<u>являются изоморфизмами.</u>

<u>Набросок доказательства.</u> Отображение в 1) преобразует c из $A^{-i}(X \to pt)$ в $c_{pt}([pt])$ из $A_i X$. Обратный гомоморфизм преобразует элемент a из $A_i X$ в набор гомоморфизмов $b \mapsto a \times b$ из $A_k Y'$ в $A_{k+i}(X \times Y')$, где $a \times b$ - внешнее произведение ([Fu_1, § 4.3]). Проверку того, что для $c \in A^{-i}(X \to pt)$ выполняется равенство $c_{Y'}(b) = c_{pt}([pt]) \times b$, можно свести к случаю $b = [Y']$, где Y' - неприводимое многообразие (ибо c коммутирует со взятием прямого образа); тогда $g: Y' \to pt$ - плоский морфизм, $b = g^*[pt]$, и нужное нам равенство следует из перестановочности c со взятием плоского обратного образа.

Обратный гомоморфизм

$$L: A^{i-n}(W \xrightarrow{fg} Y) \to A^i(W \xrightarrow{g} X)$$

в 2) определяется следующим образом. Пусть $c \in A^{l-n}(fg)$, а $h : X' \longrightarrow X$ – произвольный морфизм. График $\gamma : X' \to X' \times_Y X$ осуществляет регулярное вложение коразмерности n. Тогда $c_{X'}$ преобразует $A_k X'$ в $A_{k-l+n}(X' \times_Y W)$, а $[\gamma]_{X' \times_Y W}$ преобразует $A_{k-l+n}(X' \times_Y W)$ в $A_{k-l}(X' \times_X W)$. Определим $L(c)_{X'}$ как композицию $[\gamma]_{X' \times_X W} \circ c_{X'}$. То что эти два гомоморфизма взаимно обратны, следует из перестановочности элементов из A с операциями типа (*ii*).

ЗАМЕЧАНИЕ. Это предложение – в стиле подхода Манина к изучению соответствий и мотивов [Man]. Манин определяет соответствия между X и Y как гомоморфизмы из $A_*(Y \times V)$ в $A_*(X \times V)$ для всех V. В случае особых многообразий важно, что наши классы действуют на всех морфизмах схем в Y, но не просто как произведения. В бивариантной теории можно также доказать и другие формулы "мотивов" для проективных расслоений, моноидальных преобразований и т.д. Поэтому можно надеяться, что бивариантная теория окажется полезной для обобщения теории мотивов на особые многообразия.

<u>9.1.4.</u> ОБОЗНАЧЕНИЯ. Гомоморфизмы Гизина, заданные канонической ориентацией $[f]$ морфизма л.п.п. $f : X \to Y$, будем, как и в § 2.5, обозначать через

$$f^! : A_k Y \longrightarrow A_{k-d} X$$

и

$$f_! : A^k X \longrightarrow A^{k+d} X$$

(если морфизм f – собственный).

<u>§ 9.2. Формулы пересечения</u>

<u>9.2.1. Формула избытка пересечения.</u> Пусть

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

– расслоенный квадрат, в котором f и f' – морфизмы локально-полных пересечений коразмерностей d и d'. Пусть, далее, E –

векторное расслоение ранга e над X', построенное следующим образом: разложим f в композицию регулярного вложения $i: X \longrightarrow P$ и гладкого морфизма $p: P \rightarrow Y$; тогда f' разлагается в композицию $p' \circ i'$, где $i': X \rightarrow P \times_Y Y'$, $p': P \times_Y Y' \rightarrow Y$, и нормальное расслоение $N_{i'}$ к i' является подрасслоением расслоения $g'^* N_i$; расслоение E – это факторрасслоение $g'^* N_i / N_{i'}$. (Можно проверить, что E не зависит от выбора указанного разложения.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $g^*[f] = c_e(E)\cdot[f']$ в $A^d(X' \longrightarrow Y')$.

<u>Доказательство.</u> Как и выше, дело сводится к случаю, когда f является замкнутым вложением, а в этом случае наш результат вытекает из формулы для локализованных классов пересечений, приведенной в [FM_1, предл. 3.3].

Отсюда вытекает следующее обобщение результатов работы [FM_1] на особые многообразия.

СЛЕДСТВИЕ. <u>В условиях предыдущего предложения:</u>

1) <u>если</u> $a \in A_k Y'$, <u>а</u> g – <u>собственное отображение, то</u>

$$f^! g_*(a) = g'_*(c_e(\tilde{E}) \frown f'^!(a))$$

в $A_{k-d} X$;

2) <u>если</u> $b \in A^k X$, <u>а</u> f – <u>собственное отображение, то</u>

$$g^* f_!(b) = f'_!(g'^*(b)\cdot c_e(E))$$

в $A^{k+d} Y'$.

<u>Доказательство.</u> Для доказательства утверждения 1) воспользуемся свойством естественности:

$$[f]\cdot g_*(a) = g'_*(g^*([f])\cdot a) = g'_*(c_e(E)\cdot[f']\cdot a).$$

Утверждение 2) устанавливается так:

$$g^* f_*(b\cdot[f]) = f'_* g^*(b\cdot[f])$$

$$= f'_*(g'^*(b)\cdot g^*[f]) = f'_*(g'^*(b)\cdot c_e(E)\cdot[f']).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Подобным образом можно получить и другие формулы. Например, пусть g является морфизмом л.п.п. (или плоским морфизмом), либо же схема Y неособа, и все схемы имеют чистую

размерность. Тогда

1) если $b\in A^*X$, а f – собственное отображение, то

$$g^!(f_*(b\frown[X])) = f'_*(g'^*(b)\cdot c_e(E)\frown[X'])$$

в A_*Y';

2) если $b\in A^*Y'$, а g – собственное отображение, то

$$f^*(g_!(b)\frown[Y]) = g'_*(f'^*(b)\cdot c_e(E)\frown[X'])$$

в A_*X.

9.2.2. Моноидальные преобразования. Основная формула "$\pi_*\pi^*=id$" для бирационального морфизма $\pi:\tilde{Y}\to Y$ неособых многообразий позволяет доказывать формулу на многообразии Y, производя раздутия и опуская ее на более просто устроенные многообразия $\tilde{Y}$. Приводимое ниже предложение поставляет аналогичный прием для работы с особыми многообразиями в бивариантной теории.

Пусть Z – регулярно вложенная замкнутая подсхема схемы Y, а $\tilde{Y}$ – раздутие Y вдоль Z. Проекция $\pi:\tilde{Y}\to Y$ является морфизмом л.п.п. относительной коразмерности нуль. Поэтому имеется канонический класс $[\pi]$ в $A^0(\tilde{Y}\xrightarrow{\pi}Y)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *В вышеприведенных обозначениях,*

$$\pi_*([\pi])=1 \quad \text{в} \quad A^0Y.$$

СЛЕДСТВИЕ. *Построим по любому морфизму* $f:X\to Y$ *расслоенный квадрат*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[r, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\tilde{Y} \arrow[r, "\pi"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Тогда $\pi^*: A^k(X\xrightarrow{f}Y)\to A^k(\tilde{X}\xrightarrow{\tilde{f}}\tilde{Y})$ *– расщепляющийся мономорфизм, левым обратным к которому является гомоморфизм* $c\longmapsto\pi_*(c\cdot[\pi])$.

Доказательства. Следствие получается из предложения, если воспользоваться естественностью: $\pi_*(\pi^*(a)\cdot[\pi]) = a\cdot\pi_*[\pi]$.

Предложение следует из даваемого ниже подробного описания гомоморфизмов $[\pi]_{Y'}: A_kY'\to A_k\tilde{Y}'$ для произвольного морфизма $g:Y'\to Y$ и $\tilde{Y}'=\tilde{Y}\times_Y Y'$. Для любого неприводимого k-

мерного подмногообразия V' в Y' класс $[\pi]_{Y'}[V']$ описывается одним из следующих двух правил:

(i) Если $g(V')\not\subset Z$, то рассмотрим раздутие $\widetilde{V}\subset\widetilde{Y}'$ многообразия V' вдоль $g^{-1}(Z)$. Тогда класс $[\pi]_{Y'}[V']-[\widetilde{V}']$ получается из класса из $A_k(\widetilde{\pi}^{-1}g^{-1}Z)$.

(ii) Если $g(V')\subset Z$, то рассмотрим индуцированное отображение $\bar{g}: V'\to Z$ и нормальное расслоение N к Z в Y. Тогда $P(\bar{g}^*N)\subset\widetilde{Y}'$ и $[\pi]_{Y'}[V'] = c_{d-1}(F)\frown[P(\bar{g}^*N)]$, где F – универсальное факторрасслоение ранга $d-1$ на $P(g^*N)$, $d=\mathrm{rank}\ N$.

В случае (i), поскольку наши операции коммутируют со взятием прямых образов, дело сводится к случаю $\widetilde{V}'=V'=Y'$, в каковом оно следует из формулы избытка пересечения. Случай (ii) разбирается аналогично с помощью той же формулы.

9.2.3. Формула остаточного члена пересечения. Лаксов решил задачу вычисления цикла двойных точек отображения неособых многообразий, используя конструкцию схемы двойных точек в виде некоторой остаточной схемы. Клеймэн обобщил это вычисление на случай точек большей кратности, доказав элегантное обобщение формулы остаточного члена пересечения [Kl$_2$]. Эта формула выводится также из приведенного ниже предложения, обобщающего формулы, полученные в [FL].

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d, "k"] & \\
D \arrow[r, "j"] & X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\
 & Y' \arrow[r, "g"] & Y
\end{tikzcd}$$

где f, f', j, k – замкнутые вложения, а квадрат является расслоенным квадратом. Предположим, что отображение $j'=f'\circ j$ осуществляет вложение D как дивизора Картье на Y', а также что Z – остаточная схема для D в X, т.е. их пучки идеалов

на Y' связаны соотношением $I(X') = I(D)\cdot I(Z)$. Пусть $k = f'\circ k$. Предположим еще, что f и k – регулярные вложения одинаковой коразмерности d. Пусть N_f и $N_{j'}$ – нормальные расслоения к f и j', а F – виртуальное расслоение $(g'j)^*(N_f)-N_{j'}$ на D.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. <u>Если выполнены все предыдущие предположения, то</u>

$$g^*([f]) = k_*([k']) + j_*(c_{d-1}(F)\cdot[j'])$$

в $A^d(X' \to Y')$.

<u>Набросок доказательства.</u> Как и Лаксов ([Lak], [Fu_3]), рассмотрим раздутие $\tilde{Y}$ многообразия Y' вдоль Z со стягиванием $\pi : \tilde{Y}' \to Y'$. Пусть $\tilde{X}' = \pi^{-1}(X')$. Согласно п. 9.2.2, достаточно показать, что обе части формулы при подъеме π^* переходят в равные классы из $A^d(\tilde{X}' \to \tilde{Y}')$. Но при указанном раздутии все входящие в формулу компоненты переходят в дивизоры и классы Чженя, и нужное нам утверждение получается с помощью формального вычисления, аналогичного проделанному в [Fu_3] и [FL], причем здесь это вычисление даже проще, поскольку нет необходимости возвращаться назад в Y' (подробности см. в [Fu_2]).

Точно так же, как и в п. 9.2.1, из этого предложения следуют четыре формулы с гомоморфизмами Гизина. Их вывод мы предоставляем читателю.

Дальнейшее обсуждение проблем, связанных с этой тематикой, приводится в §§ 10.3 и 10.11.

Глава 10

ДРУГИЕ БИВАРИАНТНЫЕ ТЕОРИИ. НЕРЕШЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

В этой заключительной главе ч. I мы даем набросок построения ряда других бивариантных теорий и связанных с ними преобразований Гротендика. Мы также перечисляем ряд проблем, остающихся пока без ответа.

§ 10.1. Теоремы о неподвижных точках для когерентных пучков

Эквивариантные версии теоремы Римана – Роха, часто называемые теоремами Лефшеца – Римана – Роха, приводят к теоремам о неподвижных точках для когерентных пучков (см. [BFQ]). В этом параграфе мы опишем их обобщение на бивариантные теории.

<u>10.1.1. Комплексный случай.</u> Пусть $\mathcal{C}$ – категория квазипроективных схем X с автоморфизмом $x : X \to X$ конечного порядка, для которых схема $|X| = X^x$ неподвижных точек полна (проективна). Морфизмы $f : X \to Y$ коммутируют с соответствующими автоморфизмами

($\varphi\circ f = f\circ x$); индуцированное отображение схемы $|X|$ в схему $|Y|$ обозначается через $|f|$. Ограниченными морфизмами считаются собственные морфизмы, а независимыми квадратами – Tor-независимые расслоенные квадраты. Эквивариантная алгебраическая K-группа

$$K^{eq}_{alg}(X \xrightarrow{f} Y)$$

определяется как факторгруппа свободной абелевой группы, порожденной всеми парами ($\mathcal{F}^{\cdot}, \varphi^{\cdot}$), где $\mathcal{F}$ представляет собой f-совершенный комплекс на X, а $\varphi^{\cdot}: x^*F^{\cdot} \to F^{\cdot}$ – гомоморфизм комплексов, как и в § 2.1 ч. II, по модулю соотношений, задаваемых точными последовательностями и квазиизоморфизмами. Построим преобразование Гротендика

$$\tau : K^{eq}_{alg}(X \xrightarrow{f} Y) \longrightarrow H(|X| \xrightarrow{|f|} |Y|)\otimes \mathbb{C}.$$

Когда Y – точка, а схема X – полная, это преобразование вычисляет число Лефшеца $\sum(-1)^i \mathrm{tr}\, H^i(\varphi)$, где через $H^i(\varphi)$ обозначен индуцированный эндоморфизм группы когомологий $H^i(|X|;\mathcal{F}^{\cdot})$ в локальных координатах на схеме неподвижных точек $|X|$. В обычных когомологиях, т.е. для тождественного отображения id_X, преобразование τ совпадает со взятием композиции:

$$K^{eq}_{alg}(X \xrightarrow{id} X) \xrightarrow{r} K^{eq}_{alg}(|X| \longrightarrow |X|) \xrightarrow{ct} H^*(|X|)\otimes \mathbb{C}.$$

Здесь r – отображение ограничения (обратный образ), а ct – след Черня. Точнее, локально-свободный пучок E на $|X|$ с эндоморфизмом φ расщепляется в прямую сумму пучков $E^{(a)}$, $a\in\mathbb{C}$, таких что эндоморфизмы $\varphi - a\cdot id$ нильпотентны на $E^{(a)}$; тогда $ct(E,\varphi) = \sum_a ch(E^{(a)})\otimes a$.

В общем случае представим морфизм $f: X\to Y$ вложением схемы X в $Y\times M$, где схема M неособа. Эквивариантный конормальный пучок N к $|M|$ в M задает обратимый элемент $\lambda_{|M|}M = \sum(-1)^i[\Lambda^i N]$ из $K^{eq}_{alg}(|M| \xrightarrow{id} |M|)$. Сопоставим каждому эквивариантному f-совершенному комплексу $F^{\cdot}$ на X эквивариантную резольвенту $E^{\cdot}$ комплекса $F^{\cdot}$ на $Y\times M$. Ограничение резольвенты $E^{\cdot}$ на $|Y|\times|M|$ точно вне $|X|$, поэтому

$$ct(pr^*(\lambda_{|M|}M)^{-1}\otimes E^{\cdot}|_{|Y|\times|M|})\cdot td(T_{|M|})$$

– элемент из $H(|Y|\times|M|, |Y|\times|M|\setminus|X|)\otimes\mathbb{C}$. Отождествляя последнюю группу с группой $H(|X|\to|Y|)\otimes\mathbb{C}$, получим нужный элемент $\tau(F)$. Обобщая приводимое в ч. II доказательство, как это сделано в [BFQ], можно показать, что построенное отображение τ не зависит от выбранного вложения и является преобразованием Гротендика. Как и в ч. II, преобразование τ поднимается до преобразования в топологическую K-теорию.

В случае ковариантных групп принадлежащий Кварту [Qua] вариант теоремы для чистой алгебраической K-теории сильнее и проще формулируется. Можно ли построить преобразование Гротендика из $K^{eq}_{alg}(X\to Y)$ в $K_{alg}(|X|\to|Y|)\otimes\Lambda$ для некоторого кольца коэффициентов Λ так, чтобы указанное выше преобразование получалось из него взятием композиции с неэквивариантным преобразованием Римана – Роха из $K_{alg}\otimes\Lambda$ в $H\otimes\mathbb{C}$? Хотелось бы иметь такой результат для произвольных основных полей и более общих эндоморфизмов $x: X\to X$. Одна близкая проблема обсуждается в § 10.8.

<u>10.1.2. Случай Фробениуса.</u> Пролить некоторый свет на то, каким может быть решение вышеприведенной задачи, может случай Фробениуса. В качестве категории $\mathcal{C}$ возьмем категорию всех алгебраических схем над конечным полем $\mathbb{F}_q$, как и раньше, с собственными формизмами и Tor-независимыми квадратами. Определим $K(X\xrightarrow{f}Y)$, как и выше, но с помощью f-совершенных комплексов $\mathcal{F}^{\cdot}$ с $\mathbb{F}_q$-линейными эндоморфизмами $\varphi^i: F^{\cdot}\to F^{\cdot}$ (т.е. $\varphi^i(as) = a^q\varphi^i(s)$ для $a\in\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, $s\in\Gamma(U\,F^i)$ и открытой подсхемы U в X). Как и прежде, получаем некоторую бивариантную теорию.

Пусть D – категория конечных множеств, все морфизмы которой считаются ограниченными и все расслоенные квадраты – независимыми. Пусть $F(S\to T)$ обозначает $\mathbb{F}_q$-пространство $\mathbb{F}_q$-значных функций на S. Бивариантная теория строится следующим образом. Если $f: S\to T$, $g: T\to U$, $\alpha\in H(f)$, $\beta\in H(g)$, то произведение $\alpha\times\beta$ определим формулой $\alpha\cdot\beta(s) = \alpha(s)\beta(f(s))$, а прямой образ – формулой $f_*(\alpha)(t) = \sum\alpha(s)$, где суммирование производится по всем $s\in f^{-1}(t)$. Обратный образ для отображения $g: T'\to T$ определяется формулой $g^*(\alpha)(s') = \alpha(g'(s'))$, где $g': S\times_T T'\to S$ – индуцированное отображение.

Обозначим множество $\mathbb{F}_q$-точек произвольной $\mathbb{F}_q$-схемы X через $|X|$. Морфизм схем $f: X\to Y$ индуцирует морфизм

$|f| : |X| \longrightarrow |Y|$. Поэтому определен функтор из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$, сохраняющий ограниченные морфизмы и независимые квадраты. Определим преобразование Гротендика

$$\mathrm{tr} : K(X \xrightarrow{f} Y) \longrightarrow F(|X| \xrightarrow{|f|} |Y|)$$

по следующему правилу. Паре $(\mathcal{F}^{\cdot}, \varphi^{\cdot})$ на X сопоставим пучки гомологий $\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^{\cdot})$; на слоях над $P \in |X|$ индуцированы $\mathbb{F}_q$-линейные эндоморфизмы $H^i(\varphi^{\cdot})(P)$. Положим

$$\mathrm{tr}(\mathcal{F}^{\cdot}, \varphi^{\cdot})(P) = \sum_i (-1)^i \mathrm{tr}(H^i(\varphi^{\cdot})(P)).$$

То что это преобразование tr определено корректно и является преобразованием Гротендика, легко следует из доказанного в [Fu_4]. Существенным моментом является то, что сопоставление эквивариантным пучкам $(\mathcal{F}, \varphi)$ следа $(\varphi(P))$ аддитивно на точных последовательностях; высшие Tor-группы можно не учитывать. В ковариантном случае, применяя это преобразование к структурному пучку полной $\mathbb{F}_q$-схемы, получаем обобщенную теорему Шевалле-Уорнинга [Fu_4].

§ 10.2. Бивариантные теории для конечных групп

Ковариантные и контравариантные группы Гротендика G-модулей, используемые специалистами по теории групп, а также конструкция Бернсайда, имеют естественные обобщения в бивариантных теориях. Мы приведем здесь набросок такого построения, чтобы, с одной стороны, продемонстрировать всеобщность бивариантной теории, а с другой стороны, попытаться привлечь внимание алгебраистов к этой тематике.

10.2.1. Пусть $\mathcal{C}$ – категория конечных групп. Все гомоморфизмы считаются ограниченными. Независимыми квадратами пусть будут расслоенные квадраты

$$\begin{array}{ccc} G' & \xrightarrow{g'} & G \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ H' & \xrightarrow{g} & H \end{array}$$

(т.е. $G = \{(y', x) \in H' \times G \mid g(y') = f(x)\}$), для которых $H = g(H') \cdot f(G)$.

Пусть A – коммутативное кольцо с единицей. Обозначим через $A[G]$ групповое кольцо группы G с коэффициентами в A. Под $A[G]$-модулем будем понимать конечно-порожденный левый $A[G]$-модуль. Пусть $f:G\to H$ – гомоморфизм. Будем называть $A[G]$-модуль f-<u>совершенным</u>, если он является проективным как модуль над подкольцом $A[\operatorname{Ker} f]$ кольца $A[G]$. Определим

$$K_A(G \xrightarrow{f} H)$$

как группу Гротендика всех f-совершенных $A[G]$-модулей.

Если $f:G\to H$, $g:H\to I$ – гомоморфизмы групп, а M и N – соответственно f-совершенный $A[G]$-модуль и g-совершенный $A[H]$-модуль, то модуль $M\otimes N$ с диагональным действием $x\cdot(m\otimes n)=x\cdot m\otimes f(x)\cdot n$ будет gf-совершенным $A[G]$-модулем. (Это – простое обобщение леммы Суона [Sw, § 5.1]. Нужно воспользоваться тем, что для всякого f-совершенного модуля M существует $A[G]$-модуль M', такой что модуль $M\oplus M'$ является $A[\operatorname{Ker}(f)]$-свободным.) Тогда формула $[M]\cdot[N]=[M\otimes_A N]$ определяет <u>произведение</u> из $K_A(f)\otimes K_A(g)$ в $K_A(gf)$.

Если $f:G\to H$, $g:H\to I$ – гомоморфизмы групп, а модуль M gf-совершенен, то индуцированный $A[H]$-модуль $A[H]\otimes_{A[G]}M$ будет g-совершенным. Формула $f_*[M]=[A[H]\otimes_{A[G]}M]$ определяет <u>прямой образ</u> f_* из $K_A(gf)$ в $K_A(g)$.

Для независимого квадрата (1) из f-совершенности произвольного $A[G]$-модуля вытекает его f-совершенность, но уже как $A[G']$-модуля, и поэтому соответствие $[M]\mapsto[M]$ определяет <u>обратный образ</u> g^* из $K_A(f)$ в $K_A(f')$. Читатель может убедиться, что выполнены все аксиомы коммутативной бивариантной теории; наложенные на независимые квадраты условия позволяют доказать согласованность прямых и обратных образов.

Группы $K_A^*(G)=K_A(G\xrightarrow{id}G)$ и $K_{A*}(G)=K_A(G\to\{1\})$ задают обычные контравариантный и ковариантный функторы с обычной кольцевой структурой на $K_A^*(G)$ и структурой $K_A^*(G)$-модуля на $K_{A*}(G)$. Формула проекции выражает принцип Фробениуса (см. [Lam]).

<u>10.2.2.</u> Гомоморфизмы $f:G\to H$, для которых порядок подгруппы $\operatorname{Ker}(f)$ обратим в A, составляют класс отображений с каноническими ориентациями $\theta(f)$ в $K_A(f)$ в указанном в § 2.6 смысле. Действительно, при этом предположении кольцо A с тривиальным G-действием является f-совершенным $A[G]$-модулем, и можно

положить $\theta(f)=[A]$. Более того, эти ориентации строгие, поскольку для любого гомоморфизма $e: F\to G$ изоморфизмом, обратным к умножению на $\theta(f)$, служит гомоморфизм Картана

$$K_A(F \xrightarrow{fe} H) \longrightarrow K_A(F \xrightarrow{e} G),$$

задаваемый просто соответствием $[M]\mapsto[M]$, так как любой $A[F]$-модуль, проективный над $A[Ker(fe)]$, проективен и над $A[Ker(e)]$. Этот гомоморфизм Картана определен для любых гомоморфизмов e и f, но даже в классическом случае, когда $e=id$ и $H=\{1\}$, он не обязан быть изоморфизмом.

10.2.3. Любой гомоморфизм $A\to B$ коммутативных колец определяет преобразование Гротендика $K_A\to K_B$ при помощи расширения кольца скаляров (т.е. $[M]\mapsto[B\otimes_A M]$). При другом простом преобразовании Гротендика K_A в себя – двойственности – класс $[M]$ преобразуется в $[M^*]$, где $M^*=Hom_A(M,A)$, а структура $A[G]$-модуля задается формулой $(xf)(m)=f(x^{-1}m)$, где $x\in G$, $m\in M$, $f\in M^*$.

10.2.4. Конструкция Бернсайда также допускает естественное обобщение в рамках бивариантных теорий. Пусть дан гомоморфизм $f: G\to H$. Конечное G-множество назовем f-совершенным, если для всех $s\in S$ порядок группы

$$\{x\in Ker(f)\,|\,x\cdot s=s\}$$

обратим в A. Классы изоморфных f-совершенных G-множеств образуют абелеву полугруппу относительно операции взятия несвязной суммы. Пусть $\Omega_A(G\xrightarrow{f}H)$ – ассоциированная с этой полугруппой абелева группа. Эти группы определяют бивариантную теорию, в которой произведение индуцировано прямым произведением, прямой образ f_* задан формулой $f_*[S]=[H\times_G S]$, а обратный образ – формулой $g^*[S]=[S]$, причем G' действует на S так: $x'\cdot s=g(x')\cdot s$. Конечно, $\Omega_A(G\xrightarrow{id}G)$ – обычное кольцо Бернсайда группы G с коэффициентами в A.

Для всякого f-совершенного G-множества S свободный A-модуль $A[S]$ является f-совершенным $A[G]$-модулем. Отображение, преобразующее S в $A[S]$, определяет преобразование Гротендика

$$\Omega_A \longrightarrow K_A.$$

10.2.5. Можно ли определить операции Адамса ψ_n на бивариантных группах $K_A(G \xrightarrow{f} H)$, когда A – поле (ср. [Ke])? Является ли инвариант Уолла (см. [Ve_2]) частью преобразования Гротендика бивариантных теорий? Существуют ли интересные бивариантные теории для компактных групп Ли?

§ 10.3. Ориентации в алгебраической геометрии

Чтобы иметь богатый источник гомоморфизмов Гизина, нужно располагать широким классом отображений с каноническими ориентациями. Например, в алгебраической K-теории такой класс составляют совершенные морфизмы; действительно, это предположение означает, что пучок $\mathcal{O}_X$ имеет конечную Tor-размерность над $\mathcal{O}_Y$, и поэтому $\mathcal{O}_X$ определяет канонический класс в $K_{alg}(X \xrightarrow{f} Y)$. Однако в теории рациональной эквивалентности и теории гомологий в настоящее время канонические ориентации определены только для небольших классов отображений и возможность расширения их совершенно неясна.

10.3.1. Морфизмы локально-полных пересечений квазипроективных многообразий обладают каноническими ориентациями (см. гл. 9). В [BFM_1] и [DV] построены также гомоморфизмы Гизина в гомологиях и когомологиях для морфизмов л.п.п. Используемые при этом методы в действительности сводятся к построению канонических ориентаций в группах бивариантных гомологий (см. § 2.3 ч. II).

10.3.2. Класс плоских морфизмов постоянной относительной размерности тоже допускает канонические ориентации в теории рациональной эквивалентности (см. гл. 9) и теории гомологий [DV]; в частности, этим охватывается фундаментальный класс в $H_*(X) = H(X \to pt)$ схемы X чистой размерности. Если данный морфизм является одновременно и плоским, и морфизмом л.п.п., то указанные две канонические ориентации совпадают [DV, гл. IX, §§5.8 и 9.8].

10.3.3. Если $f: X \to Y$ – морфизм многообразий чистой размерности, причем многообразие Y неособо, то для f определен канонический класс в теории рациональной эквивалентности или в теории гомологий. Действительно, вложение X в $X \times Y$ как графика является морфизмом л.п.п., а проекция из $X \times Y$ на Y – плоским морфизмом; для каждого из этих морфизмов, согласно пп. 10.3.1 и 10.3.2, определены канонические классы; произведение этих классов и будет каноническим классом для f.

10.3.4. Жилле недавно построил гомоморфизмы Гизина для детерминентальных подсхем коразмерности 2 [Gi_1].

10.3.5. Нам неизвестно, существует ли класс морфизмов с каноническими ориентациями, содержащий все вышеприведенные классы, ни для теории рациональной эквивалентности, ни для теории гомологий. Клеймэн поставил вопрос: можно ли утверждать, что гомоморфизмы Гизина $f^!$ и $g^!h^!$ совпадают, если $f = h \circ g$, причем f — морфизм л.п.п., g — морфизм л.п.п. (соотв. плоский морфизм), а h — плоский морфизм (соотв. морфизм л.п.п.)? Клеймэн утверждает, что это действительно так, и указывает, что в случае неособого многообразия Y это следует из предложения 9.1.3, 2).

10.3.6. Общие теоремы Римана — Роха дают решение сформулированной в п. 10.3.5 проблемы по модулю кручений. В [BFM$_1$] доказано, что ковариантная алгебраическая K-группа изоморфна группе циклов по модулю рациональной эквивалентности, если рассматривать обе их с коэффициентами в $\mathbb{Q}$. Поскольку гомоморфизмы Гизина, построенные по совершенным морфизмам, функториальны в K_{alg}, то же самое справедливо и в $A_{\mathbb{Q}}$. Аналогично основная теорема ч. II устанавливает существование канонических ориентаций в $H_{\mathbb{Q}}$ для всех совершенных морфизмов комплексных квазипроективных многообразий. Ненулевые члены низших размерностей этих классов должны совпадать с классами из пп. 10.3.1–10.3.4. Имеют ли эти классы (в низших размерностях) знаменатели?

§ 10.4. Классы Чженя

На категории комплексных алгебраических многообразий определена бивариантная теория $\mathbb{F}(X \to Y)$ целочисленных алгебраических конструктивных функций, удовлетворяющих целочисленному варианту локального условия Эйлера. Существует ли преобразование Чженя, аналогичное преобразованию из теоремы 6А п. 6.2.1? Имеются веские основания в пользу этого. Выполняется соответствующий результат для прямого образа [Mac]. Справедлива соответствующая теорема Верде — Римана — Роха (п. 6.3.2), как видно из построения расслоенного квадрата

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ N \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

где g' – гладкое отображение многообразий, $g_* 1_M = \alpha$, а $g'_* 1_M = 1_X$. Выполняются также соответствующие теоремы о специализации (п. 6.3.3) [Ve_4].

Вероятно, для доказательства такой теоремы можно воспользоваться методами М.Шварца [Sch]. Однако это может оказаться весьма затруднительным, ввиду сложности структуры произвольного алгебраического отображения.

§ 10.5. Эквивариантные классы Уитни

Если $f: X \to Y$ является одновременно морфизмом Дольда (§ 5.3) и эйлеровым отображением (п. 6.1.3), а $r: X \to X$ – тождественное отображение, то класс $\theta(f)$ из § 5.4 и компонента $\omega(1_f)$ из $H^0(X \to Y)$ (см. гл. 6) совпадают. Это приводит к вопросу о существовании общей теории, обобщающей теорию трансфера Дольда из гл. 5 и теорию Уитни из гл. 6. Для некоторого более широкого класса отображений r класс $\theta(f)$, по-видимому, будет слагаемым нулевой размерности полного класса на множестве неподвижных точек. Нам неизвестен такой результат даже для отображений в точку. Нам также неизвестны аналогичные результаты для классов Чженя.

§ 10.6. Двойственность Верлье

Если $f: X \to Y$ – непрерывное отображение (конечномерных) локально-компактных пространств, такое как в § 7.3, то определено понятие f-совершенного комплекса пучков A-модулей на X [Ve_2]. Производную категорию f-совершенных комплексов обозначим через $K(X \xrightarrow{f} Y)$. Конструкции, аналогичные конструкциям § 7.1, превратят K в бивариантную теорию, а формула

$$D(A^\cdot) = R\,\underline{Hom}_X(A^\cdot, f^! A_Y)$$

определит преобразование Гротендика $D: K \to \bar{K}$, для которого $D \circ D = id$. Это преобразование обобщает двойственность Пуанкаре – Верлье для компактных пространств точно так же, как соответствующее преобразование из § 7.1 обобщает двойственность Серра – Гротендика.

§ 10.7. Отображения в топологии, не представимые погружениями

В алгебраической геометрии для любого морфизма $f: X \to Y$ неособых пространств структурный пучок $\mathcal{O}_X$ является f-совершен-

ным комплексом и, следовательно, определяет каноническую ориентацию для f в $\mathbb{K}(X \xrightarrow{f} Y)$. В топологии же постоянный пучок A_X будет f-совершенным только для погружений $f: X \to Y$. Можно ли обобщить это понятие так, чтобы пучок A_X был f-совершенным для любого замкнутого вложения $f: X \to Y$ многообразий?

Бивариантная теория $\mathbb{F}$ из гл. 6 не совсем хороша тем, что она тривиальна на отображениях $f: X \to Y$, не являющихся сюръективным отображением на компоненту связности пространства Y (в частности, она тривиальна, если X и Y суть многообразия и $\dim Y > \dim X$). Доводом в пользу существования лучшей теории до некоторой степени служит то, что предложение 6В остается справедливым и тогда, когда перестает работать приведенное естественное его доказательство (см. п. 6.3.2). (В алгебраической геометрии из-за богатства алгебраической K-теории соответствующее доказательство приводит к результату в полной общности.)

Бивариантная теория, построенная по обычным f-совершенным комплексам, как ясно из предыдущего, ничем нам не поможет, но некоторое ее обобщение, по-видимому, может решить проблему. (Комплекс пучков дает конструктивную функцию, которая задается эйлеровой характеристикой слоя.)

Если бы в такой теории гомологически нормально неособые отображения (см. § 7.3) имели канонические ориентации, это позволило бы установить справедливость <u>гипотезы Гальперина</u>:

Если $f: X \to Y$ — гомологически нормальное неособое отображение пространств Эйлера, то

$$w_*(X) = [wN_f]^{-1} \frown f^! w_*(Y)$$

(класс wN_f определен по формуле Тома с квадратами Стинрода).

<u>§ 10.8. Независимые квадраты для алгебраической K-теории</u>

Бивариантные теории оказываются особенно полезными, когда классы ограниченных морфизмов и независимых квадратов в нижележащей категории по возможности расширены. В алгебраической K-теории мы требовали, чтобы независимые квадраты были Tor-независимыми. Обратный образ из $K_{alg}(X \xrightarrow{f} Y)$ в $K_{alg}(X' \xrightarrow{f'} Y')$

можно, однако, определить для произвольных расслоенных квадратов

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd} \qquad (2)$$

Если f – замкнутое вложение, а $\mathcal{A}^{\cdot}$ есть f-совершенный комплекс на X, то комплекс $f_*\mathcal{A}^{\cdot}$ квазиизоморфен ограниченному комплексу $\mathcal{L}^{\cdot}$ локально-свободных пучков на Y. Существует ли комплекс $\mathcal{A}'^{\cdot}$ на X', для которого комплексы $f'_*\mathcal{A}'^{\cdot}$ и $g^*\mathcal{L}^{\cdot}$ квазиизоморфны?

В случае $\mathcal{A}^{\cdot}=\mathcal{O}_X$ ответ на этот вопрос требует более тонкого проникновения в конструкцию Серра пересечений [Se]. Аналогичный вопрос для теории рациональной эквивалентности был решен в [FM₁].

Нечто подобное необходимо, по-видимому, для обобщения доказанной Квартом теоремы Лефшеца – Римана – Роха на бивариантные теории (см. § 10.1). Например, для Tor-независимого квадрата (2) эквивариантных многообразий подсхемы неподвижных точек образуют расслоенный квадрат, который не обязан быть Tor-независимыми.

§ 10.9. Вопросы единственности

Все построенные нами преобразования Гротендика являются продолжениями простых функторов на соответствующих контравариантных группах. Несмотря на ощущение совершенной неизбежности именно таких продолжений, имеется лишь совсем немного настоящих теорем единственности. Преобразование ω для классов Уитни, построенное в гл. 6, вполне определяется своими значениями на характеристических функциях многообразий. Эту типичную теорему единственности хотелось бы обобщить на другие ситуации. Например, в работе [BFM₁] ковариантный функтор из алгебраических пучков в гомологии полностью характеризуется простыми аксиомами, но для преобразования Гротендика, построенного в ч. II, соответствующей теоремы единственности нет.

§ 10.10. Теорема Римана – Роха в аналитическом случае

Для всякого морфизма $f: X \longrightarrow Y$ комплексных аналитических пространств определено понятие f-совершенного комплекса; глобальное разложение f в композицию гладкого морфизма и проекции, используемое в § 1 ч. II для проективных многообразий, можно заменить локальными разложениями [SGA-6]. Такие f-совершенные комплексы образуют группу $K_{an}(X \xrightarrow{f} Y)$. Можно ли построить преобразование Гротендика из K_{an} в $H_{\mathbb{Q}}$ или, лучше, из K_{an} в топологическую K-теорию K_{top}, обобщающее соответствующие конструкции из ч. II для квазипроективных многообразий? Если рассматривать теорему Римана – Роха как проблему получения топологической информации по аналитическим пучкам, то это улучшило бы все известные результаты.

Локально отображение из K_{an} в K_{top} строится так же, как в ч. II. Основная трудность заключается в склейке этих отображений в одно глобальное отображение. Толедо и Тонг [TT] сумели произвести такую склейку в случае отображения в точку, и можно надеяться, что их методы помогут в решении поставленной задачи.

П. Баум дал геометрическое описание групп K-гомологий в топологическом случае и выдвинул гипотезу, что семейства эллиптических комплексов на X, параметризованных пространством Y (в смысле работы [AS, гл. IV]), могут дать аналогичное описание группы $K_{top}(X \xrightarrow{f} Y)$.

Можно ли получить теорему Атьи – Сингера об индексе из преобразования Гротендика бивариантных теорий? Построенные в ходе доказательства в [AS, гл. I] гомоморфизмы Гизина наталкивают на мысль, что для отображения $f: X \longrightarrow Y$ дифференцируемых многообразий в качестве подходящей бивариантной теории следует взять группу $K_{top}(T_X \xrightarrow{df} T_Y)$.

§ 10.11. Рациональная эквивалентность

Хотя построенная в гл. 9 операционная теория и вполне удовлетворительна во многих отношениях, было бы не лишним дать геометрическое построение бивариантной теории рациональной эквивалентности. Пока нет даже понятия алгебраического коцикла, обобщающего понятие дивизора Картье в коразмерности один, которое позволило бы построить кольца когомологий на многообразиях с особенностями. По-видимому, решение этой проблемы будет получе-

но лишь после более глубокого понимания геометрии пересечений на многообразиях с особенностями.

Важным преимуществом геометрической теории рациональной эквивалентности A было бы существование в комплексном случае преобразования Гротендика

$$cl : A \longrightarrow H$$

в бивариантную теорию гомологий, обобщающее отображение классов из $A_k(X)$ в $H_{2k}(X)$ для ковариантных групп [Fu₁]. Формулы пересечения из гл. 9 фактически выполняются для бивариантных групп гомологий, но не являются формальными следствиями этих формул в теории рациональной эквивалентности, как того хотелось бы. Для операционных групп нет отображения классов в H. Кроме того, канонический гомоморфизм из $\mathrm{Pic}(X)$ в $A^1(X \xrightarrow{id} X)$, задаваемый первым классом Чженя, не всегда является изоморфизмом; в частности, построенные в [Fu₁] канонические гомоморфизмы из групп $A^i(X)$ в группы $A^i(X \xrightarrow{id} X)$ – не всегда изоморфизмы.

Весьма вероятно, что специалисты по высшей K-теории смогут построить бивариантную теорию рациональной эквивалентности со всеми необходимыми формальными свойствами, исходя из групп $H^p_X(Y, K_p)$. В пользу этого говорят недавние результаты Жилле (см. [Gi₁]).

В таком случае существовало бы преобразование Гротендика

$$\tau : K_{alg} \longrightarrow A_{\mathbb{Q}} ,$$

обобщающее построенный в [BFM₁] гомоморфизм ковариантных функторов. По крайней мере для операционной теории преобразование τ можно определить, используя конструкцию графика, как это сделано в [BFM₁]. Однако доказательство перестановочности τ с произведениями потребовало бы внесения в § 2 ч. II надлежащих изменений в алгебраических рассуждениях. В комплексном случае получилась бы коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} K_{alg} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\alpha"'] & A_{\mathbb{Q}} \arrow[d, "cl"] \\ K_{top} \arrow[r, "ch"'] & H_{\mathbb{Q}} \end{tikzcd}$$

бивариантных теорий, где α – преобразование, построенное в ч. II.

§ 10.12. Высшая K-теория

Описанные в § 1.1 ч. II группы $K_{alg}(X \xrightarrow{f} Y)$ должны быть нульмерными группами бивариантной теории $K^i_{alg}(X \xrightarrow{f} Y)$, где $K^i_{alg}(X \xrightarrow{id} X) = K_i\mathcal{P}(X)$ – высшая K-теория Квиллена на категории векторных расслоений на X, а $K^i_{alg}(X \to pt) = k_i M(X)$ – высшая K-теория Квиллена на категории когерентных пучков на X [Qui$_1$]. По-видимому, теорию $K^i_{alg}(X \xrightarrow{f} Y)$ можно построить, исходя из категории f-совершенных комплексов; соответствующие произведения обобщили бы кольцевую структуру на $K_*\mathcal{P}(X)$ и модульную структуру на $K_*M(X)$, анонсированные в [Qui$_1$, § 7.1].

Вероятно также, что существует преобразование Гротендика из $K^i_{alg}(X \xrightarrow{f} Y)$ в $K^i_{top}(X \xrightarrow{f} Y)$, обобщающее введенное в ч. II преобразование на случай $i > 0$.

Конструкцию соответствующего преобразования ковариантных функторов недавно анонсировал Жилле [Gi$_2$].

§ 10.13. Геометрическая интерпретация элементов из бивариантных групп гомологий

Часто элементы из $H^{-i}(X \xrightarrow{f} Y)$ представляются семействами i-циклов в слоях $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, непрерывно зависящими от y. Эту идею можно облечь в строгую форму, если задавать эти семейства непрерывными сечениями в пространстве циклов с топологией, введенной в [Al]. По-видимому, группа гомотопических классов таких сечений определяет бивариантную теорию, которая отображается в $H^{-i}(X \to Y)$ (ср. п. 6.5.1).

Если f – эйлерово отображение, то класс $\omega(1_f)$ допускает такое представление. Для плоского морфизма f такое представление имеется, предположительно, и для класса $\tau(\mathcal{O}_X)$.

Всякий раз как мы имеем семейство геометрических конструкций с элементами групп $H_i(f^{-1}(y))$, стоит поинтересоваться, не лежит ли в основе какая-нибудь бивариантная теория.

ЧАСТЬ II

ПРОИЗВЕДЕНИЯ В ФОРМУЛЕ РИМАНА – РОХА

Глава I

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей части мы строим преобразование Гротендика из бивариантной алгебраической K-теории в бивариантную топологическую K-теорию. При этом используется и усиливается ряд различных теорем Римана – Роха ([SGA -6], [BFM$_1$], [Ve$_2$], [BFM$_2$]).

Все рассматриваемые в дальнейшем многообразия и схемы предполагаются комплексными и квазипроективными. Возможность обобщения полученных результатов на непроективный и некомплексный случаи была рассмотрена в §§ 10.10 и 10.11 ч. I.

В § 1.1 дан обзор известных соперничающих между собой теорем Римана – Роха и приведены связанные с ними мультипликативные формулы и ориентации отображений. В § 1.2 мы показываем, что основная теорема данной части объединяет, усиливает и проясняет эти результаты.

§ 1.1. К истории вопроса

Обозначим через $K^0_{alg}X$ группу Гротендика алгебраических векторных расслоений на X, а через $H^*X_{\mathbb{Q}}$ – группу когомологий с рациональными коэффициентами. Характер Черн

$$ch : K^0_{alg}X \to H^*X_{\mathbb{Q}}$$

определяет естественное преобразование контравариантных функторов. Для неособого X отображение двойственности Пуанкаре

$a \mapsto a \frown [X]$ является изоморфизмом из H^*X в ковариантные группы гомологий H_*X. Поэтому для всякого отображения $f: X \to Y$ неособых проективных многообразий определены гомоморфизмы Гизина $f_!: H^*X \cong H_*X \xrightarrow{f_*} H_*Y \cong H^*Y$. Гротендик рассмотрел группы K_0^{alg} когерентных алгебраических пучков и ввел в них ковариантную относительно собственных морфизмов структуру с помощью высших прямых образов. Для неособых многообразий X имеются изоморфизмы двойственности $K^0_{alg}X \cong K_0^{alg}X$, и, следовательно, каждому морфизму неособых многообразий $f: X \to Y$ соответствуют гомоморфизмы Гизина $f_!: K^0_{alg}X \to K^0_{alg}Y$. Теорема Гротендика – Римана – Роха[1)] утверждает, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} K^0_{alg}X \arrow[r, "td(T_X)\smile ch(\ )"] \arrow[d, "f_!"'] & H^*X_{\mathbb{Q}} \arrow[d, "f_!"] \\ K^0_{alg}Y \arrow[r, "td(T_Y)\smile ch(\ )"'] & H^*Y_{\mathbb{Q}} \end{tikzcd} \qquad (\text{ГРР})$$

коммутативна.

<u>1.1.1.</u> В дополнении $[BFM_1]$ к работе $[SGA\text{-}6]$ этот результат был обобщен на морфизмы локально-полных пересечений $f: X \to Y$ без предположения о неособости многообразий. В той же общности определены гомоморфизмы Гизина, а коммутативный квадрат (ГРР) обобщается до коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} K^0_{alg}X \arrow[r, "ch"] \arrow[d, "f_!"'] & H^*X_{\mathbb{Q}} \arrow[d, "f_!(td(T_f)\smile\ )"] \\ K^0_{alg}Y \arrow[r, "ch"'] & H^*Y_{\mathbb{Q}} \end{tikzcd} \qquad (SGA\text{-}6)$$

---

1) В теореме Гротендика значения берутся в группах Чжоу $A^*X_{\mathbb{Q}}$. В соответствующей теореме из $[SGA\text{-}6]$ значения берутся в градуированной K-группе; формулируемый ниже в п. 1.1.1 результат впервые был доказан в $[BFM_1]$.

где через T_f обозначено виртуальное касательное расслоение отображения f (см. § 2.3). Если X и Y неособы, то $T_f = T_X - f^* T_Y$ и (ГРР) получается из (SGA-6) ввиду мультипликативности класса Тодда.

<u>1.1.2.</u> В работе $[BFM_1]$ построен гомоморфизм

$$\tau_. : K_0^{alg} X \longrightarrow H_* X_{\mathbb{Q}}$$

для произвольной квазипроективной схемы. Этот гомоморфизм ковариантен относительно собственных отображений $f : X \longrightarrow Y$:

$$\begin{array}{ccc} K_0^{alg}X & \xrightarrow{\tau_.} & H_*X_{\mathbb{Q}} \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ K_0^{alg}Y & \xrightarrow[\tau_.]{} & H_*Y_{\mathbb{Q}} \end{array} \qquad \text{(BFM}$$

и является гомоморфизмом модулей:

$$\tau_.(E \otimes \mathcal{F}) = ch(E) \frown \tau_.(\mathcal{F})$$

для любого алгебраического векторного расслоения E и локально-свободного пучка $\mathcal{F}$ (<u>модульное свойство</u>); кроме того, справедлива формула

$$\tau_.(\mathcal{O}_X) = td(T_X) \frown [X]$$

для неособых X. Для особых X положим по определению $td_*(X) = \tau_.(\mathcal{O}_X)$ и будем называть этот класс <u>гомологическим классом Тодда</u> пространства X. Это позволяет обобщить (ГРР) на особые многообразия. Если Y – точка, получаем обобщение формулы Хирцебруха на особые проективные многообразия:

$$\sum(-1)^i \dim H^i(X,E) = \int_X ch(E) \frown td_*(X). \qquad \text{(ХРР)}$$

Приведем два других важных свойства преобразования $\tau_.$ и гомологического класса Тодда, доказанные в $[BFM_1]$:

(i) $\tau_.$ коммутирует с $\times$-произведениями.

(ii) Если морфизм f плоский, то специализацией класса Тодда общего слоя является класс Тодда специального слоя.

Из (i) следует, что $td_*(X\times Y)=td_*X\times td_*Y$; свойство (ii) представляет собой обобщение свойства инвариантности арифметического рода в плоских семействах.

1.1.3. В работах [SGA-6] и [BFM_1] построены гомоморфизмы Гизина $f^!$ ковариантных групп K_0^{alg} и H_* для морфизмов локально-полных пересечений f. Теорема Вердье – Римана – Роха [Ve_5] утверждает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} K_0^{alg}Y & \xrightarrow{\tau_\cdot} & H_*Y_Q \\ \downarrow f^! & & \downarrow td(T_f)\frown f^! \\ K_0^{alg}X & \xrightarrow{\tau_\cdot} & H_*X_Q \end{array} \qquad \text{(Вердье)}$$

Важным частным случаем является формула

$$td_*(X)=td(T_f)\frown f^!(td_*Y)$$

для морфизмов л.п.п. $f: X \longrightarrow Y$, предложенная в качестве гипотезы в [BFM_1]. Теорема Вердье для открытых вложений f была доказана в [BFM_1].

1.1.4. Итак, имеются три соперничающие теоремы Римана – Роха: 1.1.1 – 1.1.3, из которых две обобщают первоначальную теорему Гротендика и две двойственны друг другу, но ни одна не следует из другой. В теорему 1.1.1 входят $\smile$-произведения, в теорему 1.1.2 входят $\frown$- и $\times$-произведения, а в теорему 1.1.3 – некоторое более сложное произведение. Рассмотрим еще отображения, допускающие некоего рода ориентацию: (a) морфизмы л.п.п. допускают гомоморфизмы Гизина в алгебраической K-теории и гомологиях, связанные между собой теоремами 1.1.1 и 1.1.3; (b) отображению произвольного многообразия X в точку соответствует определенный канонический класс из $K_0^{alg}X$, который при преобразовании $\tau_\cdot$ переходит в гомологический класс Тодда; (с) для плоских морфизмов гомологические классы Тодда слоёв связаны между собой гомоморфизмом специализации.

Одной из причин, вызвавших появление этой работы, было желание объединить в одно целое указанные три теоремы Римана – Роха, а также разнообразные произведения и ориентации.

§ I.2. Сводка результатов

Идеальный язык для такого объединения дают бивариантные теории. Определения и основные сведения о бивариантных теориях см. в § I.I ч. I.

I.2.I. Существует бивариантная теория K_{alg}, ассоциированными с которой контравариантными и ковариантными группами являются упомянутые выше группы K^0_{alg} и K^{alg}_0 (см. § 2.I). Мы построим преобразование Гротендика

$$\tau : K_{alg} \longrightarrow H_{\mathbb{Q}}$$

в бивариантные группы гомологий $H_{\mathbb{Q}}$ с рациональными коэффициентами. Ассоциированным преобразованием $\tau^{\cdot}$ контравариантных функторов будет характер Чженя, а ассоциированным преобразованием ковариантных функторов – отображение $\tau_{\cdot}$ из п. I.I.2.

Дадим набросок построения гомоморфизма τ. По данному морфизму $f: X \longrightarrow Y$ выбираем морфизм $\varphi: X \longrightarrow M$ с неособым M, такой что $i = (f, \varphi)$ является замкнутым вложением пространства X в $Y \times M$. Группа $K_{alg}(X \xrightarrow{f} Y)$ строится по комплексам $\mathcal{A}^{\cdot}$ тех $\mathcal{O}_X$-модулей, для которых комплекс $i_* \mathcal{A}^{\cdot}$ имеет своей резольвентой ограниченный комплекс $E^{\cdot}$ локально-свободных пучков (алгебраических векторных расслоений) на $Y \times M$. Тогда

$$\tau(\mathcal{A}^{\cdot}) = td(\varphi^* T_M) \cdot ch(E^{\cdot}).$$

Здесь $td(\varphi^* T_M)$ – класс Тодда расслоения $\varphi^* T_M$, лежащий в $H^*(X; \mathbb{Q}) = H^*(X \xrightarrow{id} X)_{\mathbb{Q}}$, а $ch(E^{\cdot})$ – локализованный характер Чженя (см. [BFM$_1$]) комплекса $E^{\cdot}$, лежащий в

$$H^*(Y \times M, Y \times M \setminus X; \mathbb{Q}) = H(X \xrightarrow{f} Y)_{\mathbb{Q}}.$$

Произвольный морфизм $f: X \longrightarrow Y$ конечной Tor-размерности имеет канонический класс $\mathcal{O}_f$ в $K_{alg}(X \xrightarrow{f} Y)$ (§ 2.2); этот класс охватывает, в частности, обсуждавшиеся в п. I.I.4 случаи (a) – (c). Всякий морфизм л.п.п. f обладает каноническим классом U_f в $H(X \xrightarrow{f} Y)$; этот класс задает гомоморфизмы Гизина из пп. I.I.2 и I.I.4. Мы докажем, что для морфизмов л.п.п. f выполняется формула Римана – Роха

$$\tau(\mathcal{O}_f) = td(T_f) \cdot U_f \qquad (*)$$

в $H(X \xrightarrow{f} Y)_{\mathbb{Q}}$.

Как показывает рассуждение, проведенное в § 2.7 ч. I, все три теоремы Римана – Роха из § 1.1 немедленно следуют из существования преобразования τ и формулы (*). Это объясняет и уточняет приведенные выше высказывания об ориентациях. Например, для плоского морфизма $f : X \to Y$ класс $\tau(\mathcal{O}_f)$ из $H(X \xrightarrow{f} Y)$ таков, что его специализацией на произвольный слой служит гомологический класс Тодда $td_*(X_y)$ этого слоя; это является следствием перестановочности τ со взятием обратного образа для диаграммы

$$\begin{tikzcd} X_y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \{y\} \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Согласно результатам § 3.4 ч. I о специализации, отсюда вытекает утверждение (*ii*) п. 1.1.2.

Значительная часть силы представленных выше результатов проистекает из перестановочности преобразования τ со взятием <u>произведения</u>. Применительно к композиции $X \xrightarrow{id} X \to pt$ это дает модульное свойство из п. 1.1.2. В случае композиции $X \times Y \to X \to pt$ эта перестановочность показывает, что τ коммутирует с внешними произведениями. Для композиции $X \xrightarrow{f} Y \to pt$, где f – морфизм л.п.н., получается формула из п. 1.1.3, связывающая гомологические классы Тодда пространств X и Y.

<u>1.2.2.</u> Как в неособом (см. [AH_2]), так и в особом (см. [BFM_2]) случае теорема Римана – Роха для комплексных многообразий гораздо сильнее и естественнее в топологической K-теории. В действительности преобразование τ разлагается в композицию преобразований

$$K_{alg} \xrightarrow{\alpha} K_{top} \xrightarrow{ch} H_{\mathbb{Q}},$$

где K_{top} – бивариантная теория, построенная из четной части топологических K-когомологий, а ch – характер Черна (см. § 2.5). Кроме того, имеется поразительное следствие, которое обобщает все вышеприведенные результаты в случае отсутствия кручений и которое лучше всего выражается в топологической K-теории:

Произвольный морфизм конечной Tor-размерности обладает каноническими ориентациями и, следовательно, функториальными гомоморфизмами Гизина в топологической K-теории.

Ранее эти гомоморфизмы Гизина были известны для морфизмов л.п.п. [BFM_2]; для отображений в точку снова получаются построенные в [BFM_2] классы ориентации в K-гомологиях. Функториальность этих гомоморфизмов Гизина следует из перестановочности α с произведениями.

§ 1.3. Замечания о доказательствах

Главный новый момент в доказательстве (помимо техники, развитой в [BFM_1], [BFM_2]) связан с произведениями. Суть дела можно уяснить на следующем частном случае. Рассмотрим замкнутые вложения $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ конечной Tor-размерности. Пусть ограниченный комплекс $F^\cdot$ локально-свободных пучков на Y является резольвентой пучка $f_* \mathcal{O}_X$, а $G^\cdot$ – соответствующей резольвентой пучка $g_* \mathcal{O}_Y$ на Z. Композиция gf также будет конечной Tor-размерности, поэтому пучок $(gf)_* \mathcal{O}_X$ имеет аналогичную резольвенту $E^\cdot$ на Z. Если комплекс $F^\cdot$ продолжается до комплекса $\widetilde{F}^\cdot$ локально-свободных пучков на Z, то в качестве $E^\cdot$ можно взять тензорное произведение комплексов $\widetilde{F}^\cdot$ и $G^\cdot$; в этом случае формула произведения $\alpha(\theta_f \cdot \theta_g) = \alpha(\theta_f) \cdot \alpha(\theta_g)$ очевидна.

Однако обычно алгебраического расширения пучка $F^\cdot$ до пучка на Z нет, нет даже локального продолжения (см. [PS]), и самое большее, на что можно надеяться,– это получить продолжение $\widetilde{F}^\cdot$ пучка $F^\cdot$ как комплекса топологических векторных расслоений на Z. В таком случае встает задача: связать $E^\cdot$ с топологическим комплексом $\widetilde{F}^\cdot \otimes G^\cdot$. Эта задача, для произвольных f-совершенного и g-совершенного комплексов вместо $\mathcal{O}_X$ и $\mathcal{O}_Y$, решается в гл. 3. Было бы важным знать также, в какой степени комплексы $F^\cdot$ и $G^\cdot$ определяют комплекс $E^\cdot$ алгебраически (ср. § 10.11 ч. I).

Доказательство того, что преобразование Римана – Роха α корректно определено и согласовано со взятием прямых образов и обратных образов, аналогично соответствующему доказательству из [BFM_2]; бивариантный язык позволяет при этом сделать некоторые формальные упрощения. Для построения прямых образов используются результаты Квиллена о канонических резольвентах [Qui_1]. Доказательство инвариантности ориентаций морфизмов л.п.п. при преобразовании α (§ 4.7) является новым, в нем существенно используются общие (бивариантные) произведения.

Глава 2

ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

§ 2.1. Бивариантная алгебраическая K-теория

Для простоты мы ограничимся категорией квазипроективных схем над полем. Пусть дан морфизм $f: X \longrightarrow Y$. Комплекс[1] $\mathcal{A}^\cdot$ пучков $\mathcal{O}_X$-модулей называется f-совершенным, если для некоторого (или любого) разложения f в композицию замкнутого вложения $i: X \longrightarrow P$ и гладкого морфизма $p: P \longrightarrow Y$ комплекс $i_*(\mathcal{A}^\cdot)$ пучков $\mathcal{O}_P$-модулей квазиизоморфен некоторому ограниченному комплексу локально-свободных пучков.

Группа

$$K_{alg}(X \xrightarrow{f} Y)$$

– это факторгруппа свободной абелевой группы, порожденной классами $[\mathcal{A}^\cdot]$ квазиизоморфных f-совершенных комплексов на X, по

---

1) Комплекс $\mathcal{A}^\cdot$ – это набор пучков $\mathcal{A}^p$, $p \in \mathbb{Z}$, и граничных гомоморфизмов $d^p: \mathcal{A}^p \longrightarrow \mathcal{A}^{p+1}$, таких что $d^{p+1} \circ d^p = 0$. Комплекс называется ограниченным (bounded), если $\mathcal{A}^p = 0$ для всех, кроме конечного числа, значений p. Гомоморфизм комплексов $\mathcal{A}^\cdot \longrightarrow \mathcal{B}^\cdot$ – это набор гомоморфизмов $\mathcal{A}^p \longrightarrow \mathcal{B}^p$, коммутирующих с граничными гомоморфизмами. Гомоморфизм называется квазиизоморфизмом, если индуцированные им морфизмы пучков гомологий являются изоморфизмами, или, эквивалентно, если цилиндром этого гомоморфизма является точный (ацикличный) комплекс.

модулю соотношений

$$[\mathcal{A}_2^\bullet] = [\mathcal{A}_1^\bullet] + [\mathcal{A}_3^\bullet],$$

которые выполняются для всех точных последовательностей

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_1^\bullet \longrightarrow \mathcal{A}_2^\bullet \longrightarrow \mathcal{A}_3^\bullet \longrightarrow 0$$

f-совершенных комплексов.

1) Для произвольной диаграммы

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "b", "g"'] & \\ X \arrow[ur, "a", "f"'] \arrow[rr] & & Z \end{tikzcd}$$

в которой $a = [\mathcal{A}^\bullet]$, $b = [\mathcal{B}^\bullet]$, произведение $a \cdot b$ определим как класс $[\mathcal{A}^\bullet \otimes_X \mathbb{L}f^*\mathcal{B}^\bullet]$, где <u>левый производный комплекс</u> $\mathbb{L}f^*\mathcal{B}^\bullet$ – это комплекс $f^*\mathcal{L}^\bullet$; а $\mathcal{L}^\bullet$ – комплекс локально-свободных (или плоских) $\mathcal{O}_Y$-модулей, квазиизоморфный комплексу $\mathcal{B}^\bullet$. Доказательство gf-совершенности тензорного произведения комплексов $\mathcal{A}^\bullet \otimes_X \mathbb{L}f^*\mathcal{B}^\bullet$ дано в [SGA-6, гл. III, § 4.5].

2) Для произвольной диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "b"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

в которой $a = [\mathcal{A}^\bullet]$, определим прямой образ f_*a как класс $[\mathbb{R}f_*\mathcal{A}^\bullet]$, где <u>правый производный комплекс</u> $\mathbb{R}f_*\mathcal{A}^\bullet$ – это комплекс $f_*\mathcal{J}^\bullet$, а $\mathcal{J}^\bullet$ – комплекс инъективных $\mathcal{O}_X$-модулей, квазиизоморфный комплексу $\mathcal{A}^\bullet$. Если морфизм f – собственный, а комплекс $\mathcal{A}^\bullet$ является gf-совершенным, то комплекс $\mathbb{R}f_*\mathcal{A}^\bullet$ будет g-совершенным ([SGA-6, гл. III, § 4.8]). Поэтому ограниченными морфизмами в алгебраической K-теории служат собственные отображения.

3) Пусть расслоенный квадрат

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"', "\textcircled{a}"] \\
Y' \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

<u>Tor-независим</u>, т.е. $\mathrm{Tor}_i^Y(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)=0$ для $i>0$, и $a=[\mathcal{A}^\cdot]$. Определим обратный образ g^*a как класс $[\mathbb{L}g'^*(\mathcal{A}^\cdot)]$. Предположение о Tor-независимости квадрата гарантирует f'-совершенность комплекса $\mathbb{L}g'^*\mathcal{A}^\cdot$ ([SGA-6, гл. III, п. 4.7.2]). В качестве независимых квадратов в алгебраической K-теории берутся Tor-независимые расслоенные квадраты.

Группа $K_{alg}(X \xrightarrow{id} X)$ канонически изоморфна группе Гротендика $K^0_{alg}X$ алгебраических векторных расслоений (локально-свободных пучков) на X. Группа $K_{alg}(X \to pt)$ канонически изоморфна группе Гротендика $K_0^{alg}X$ когерентных пучков на X; это сводится к тому факту, что когерентные пучки на X имеют конечные локально-свободные резольвенты на любом неособом многообразии, содержащем X. Описанные выше произведения, прямые образы и обратные образы доставляют обобщение хорошо известных свойств этих групп.

В случае когда X – точка, группа $K_{alg}(X \xrightarrow{f} Y)$ равна $\mathbb{Z}$, если f преобразует X в неособую точку пространства Y, и тривиальна, если f отображает X в особую точку. Заметим, что для бивариантных гомологий всё наоборот (см. § 3 ч. I): соответствующие группы больше, если $f(X)$ – особая точка.

Более подробное и изощренное описание групп $K_{alg}(X \to Y)$ дано в [SGA-6, гл. IV, § 3.3], где они определяются как группы Гротендика триангулированной категории f-совершенных комплексов. Там же можно найти все сведения, необходимые для проверки аксиом бивариантной теории.

§ 2.2. Морфизмы конечной Tor-размерности

Морфизм $f: X \to Y$ квазипроективных схем имеет <u>конечную Tor-размерность</u> (или, в терминологии [SGA-6], является <u>совер-</u>

ценным морфизмом), если существует такое N, что

$$\operatorname{Tor}_i^Y(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) = 0$$

для всех $i > N$ и всех когерентных пучков $\mathcal{G}$ на Y. Важными примерами таких морфизмов служат:

I) любой морфизм $f : X \longrightarrow Y$ в неособое Y, в частности отображение из произвольного X в точку;

2) любой плоский морфизм, в частности гладкий морфизм;

3) любой морфизм локально-полного пересечения (см. § 2.3);

4) любая композиция морфизмов конечной Tor-размерности;

5) любой морфизм $f' : X' \longrightarrow Y'$ из Tor-независимого расслоенного квадрата

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd} \tag{1}$$

в котором f имеет конечную Tor-размерность.

Условие конечной Tor-размерности морфизма $f : X \longrightarrow Y$ равносильно тому, что структурный пучок $\mathcal{O}_X$ (рассматриваемый как комплекс с единственной ненулевой компонентой в размерности нуль) является f-совершенным комплексом. Пусть

$$\mathcal{O}_f = [\mathcal{O}_X]$$

– элемент из $K_{alg}(X \xrightarrow{f} Y)$, задаваемый пучком $\mathcal{O}_X$. Эти классы задают канонические ориентации в смысле § 2.6 ч. I. Далее, для квадрата (I) выполнено соотношение $g^*(\mathcal{O}_f) = \mathcal{O}_{f'}$. Если f отображает X в точку, то $\mathcal{O}_f$ есть обычный фундаментальный класс $[\mathcal{O}_X]$ из $K_0^{alg}(X)$.

§ 2.3. Морфизмы локально-полного пересечения

Морфизм $f : X \longrightarrow Y$ называется морфизмом локально-полного пересечения (л.п.п.), если для некоторого (или любого) разложения f в композицию замкнутого вложения $i : X \longrightarrow P$ и гладкого морфизма $p : P \longrightarrow Y$ вложение i регулярно, т.е. X задается

в P локально-регулярной последовательностью функций (см. [SGA-6, гл. VII]). Если слои гладкого отображения p имеют размерности m, а X задается в некоторой окрестности точки x в P регулярной последовательностью, состоящей из e функций, то будем говорить, что f имеет в x относительную коразмерность $e-m$. Относительная коразмерность в общем случае является локально-постоянной функцией на X; мы будем рассматривать лишь морфизмы л.п.п. постоянной относительной коразмерности.

Виртуальное касательное расслоение T_f – это элемент из $K^0_{alg}X$, определяемый формулой

$$T_f = i^*(T_p) - N,$$

где $T_p = (\Omega^1_{P/Y})^\vee$ – относительное касательное расслоение отображения p, а $N = (\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)^\vee$ – нормальное расслоение к i; здесь $\mathcal{J}$ – пучок идеалов подсхемы X в P (см. [SGA-6, гл. VII]).

Рассмотрим морфизм л.п.п. $f: X \to Y$ комплексных квазипроективных схем относительной коразмерности d. В [BFM_1] были построены гомоморфизмы Гизина в сингулярных гомологиях и когомологиях (с целыми коэффициентами). Данные там конструкции фактически приводят к ориентациям

$$\Lambda_f \in K_{top}(X \longrightarrow Y)$$

и

$$U_f \in H^{2d}(X \longrightarrow Y),$$

где K_{top} (соотв. H) – бивариантная топологическая теория, построенная по четной части K-когомологий в топологии (соотв. по обычным когомологиям) в гл. 8 ч. I. Напомним общую схему этого построения; подробности можно найти в [BFM_1, § IV.4].

Выберем какое-нибудь разложение отображения f в композицию замкнутого вложения $i: X \to Y \times M$, где M – неособое многообразие размерности n, и проекции $p: Y\times M \to Y$. Поскольку проекция p – нормально неособое отображение с комплексным нормальным расслоением, p обладает сильными ориентациями в K_{top} и H (§ 4.1 ч. I). Поэтому имеют место канонические изоморфизмы

$$K_{top}(X \xrightarrow{f} Y) \cong K_{top}(X \xrightarrow{i} Y\times M)$$

и

$$H^{2d}(X \xrightarrow{f} Y) \cong H^{2d+2n}(X \xrightarrow{i} Y\times M).$$

Таким образом, достаточно рассмотреть случай регулярного замкнутого вложения $f: X \longrightarrow Y$ коразмерности d. Возьмем какое-либо алгебраическое векторное расслоение E на Y и алгебраическое сечение $s: Y \longrightarrow E$, обращающееся в нуль (в смысле теории схем) на X. Тогда нормальное расслоение N к схеме X, вложенной в Y, естественно расположено в ограничении E на X. Выберем классическую окрестность V подсхемы X в Y и комплексное подрасслоение C расслоения $E|V$, такие что ограничение C на X дополняет N до ограничения E на X. Обозначим через Q фактор-расслоение E/C на V и через $\bar{s}: V \longrightarrow Q$ — композицию $s|V$ с каноническим отображением E на Q. Уменьшая при необходимости V, получим отображение $\bar{s}$ пары $(V, V\setminus X)$ в пару $(Q, Q\setminus \{0\})$, где $\{0\}$ обозначает образ нулевого сечения.

Рассмотрим теперь <u>класс Кошуля – Тома</u> $\Lambda_Q \in K^0_{top}(Q, Q\setminus\{0\})$ комплексного векторного расслоения Q; класс Λ_Q задается <u>комплексом Кошуля</u> $\Lambda^{\cdot}\pi(Q^{\vee})$, где $\pi: Q \longrightarrow V$ — проекция расслоения. Тогда $\bar{s}^*(\Lambda_Q) \in K^0_{top}(V, V\setminus X) = K^0_{top}(Y, Y\setminus X) = K_{top}(X \xrightarrow{f} Y)$. Положим

$$\Lambda_f = \bar{s}^*(\Lambda_Q) \text{ в } K_{top}(X \xrightarrow{f} Y).$$

Аналогично если $U_Q \in H^{2d}(Q, Q\setminus\{0\})$ — <u>класс Тома</u> расслоения Q, положим

$$U_f = \bar{s}^*(U_Q) \text{ в } H^{2d}(X \xrightarrow{f} Y).$$

Из результатов $[BFM_1$, § IV.4$]$ следует, что введенные ориентации определены корректно. Можно также проверить, что эти ориентации являются каноническими в смысле § 2.6 ч. I: композицией морфизмов л.п.п. будет морфизм л.п.п. и $\Lambda_{gf} = \Lambda_f \cdot \Lambda_g$, $U_{gf} = U_f \cdot U_g$. Далее, если морфизм f в Tor-независимом квадрате (I) является морфизмом л.п.п. коразмерности d, то морфизм f' таков же и $g^*\Lambda_f = \Lambda_{f'}$, $g^*U_f = U_{f'}$.

<u>§ 2.4. Теорема Римана – Роха</u>

Построим по произвольному морфизму $f: X \longrightarrow Y$ комплексных проективных схем гомоморфизм

$$\alpha: K_{alg}(X \xrightarrow{f} Y) \longrightarrow K_{top}(X \xrightarrow{f} Y)$$

по следующему правилу. Выберем такой морфизм $\varphi: X \to M$ в неособое многообразие M, чтобы морфизм $i=(f,\varphi)$ определял гладкое вложение схемы X в $Y\times M$. Для всякого f-совершенного комплекса $\mathcal{A}^\cdot$ на X существует ограниченный комплекс $E^\cdot$ локально-свободных пучков (алгебраических векторных расслоений) на $Y\times M$, квазиизоморфный комплексу $i_*(\mathcal{A}^\cdot)$. Такой комплекс $E^\cdot$ называется резольвентой комплекса $\mathcal{A}^\cdot$. Рассматривая $E^\cdot$ как комплекс топологических векторных расслоений на $Y\times M$, точный вне X, с помощью разностной конструкции расслоений (см. п. 3.I.2) получаем элемент $[E^\cdot]$ из

$$K^0_{top}(Y\times M, Y\times M\setminus X) = K_{top}(X \xrightarrow{i} Y\times M).$$

Как и в § 2.3, группа $K_{top}(X\xrightarrow{i} Y\times M)$ канонически изоморфна группе $K_{top}(X\xrightarrow{f} Y)$. Поскольку резольвента единственна с точностью до квазиизоморфизма и для точных последовательностей можно построить точные последовательности резольвент (см. [BFM_2, прил. 2]), формула $\alpha[\mathcal{A}^\cdot]=[E^\cdot]$ задает следующий гомоморфизм, который мы назовем гомоморфизмом Римана – Роха:

$$\alpha^\varphi: K_{alg}(X\xrightarrow{f} Y)\longrightarrow K_{top}(X\xrightarrow{f} Y).$$

ТЕОРЕМА РИМАНА – РОХА. 1) Гомоморфизм $\alpha=\alpha^\varphi$ не зависит от φ.

2) $\alpha: K_{alg}\to K_{top}$ является преобразованием Гротендика бивариантных теорий (§ 2.7 ч. I).

3) Если $f: X\to Y$ – морфизм л.п.п., то $\alpha(\mathcal{O}_f)=\Lambda_f$.

Эта теорема включает в себя все результаты работы [BFM_2], а тем самым и результаты работы [AH], касающиеся неособых алгебраических многообразий. Преобразование α в случае тождественного отображения является естественным отображением из $K^0_{alg}X$ в $K^0_{top}X$ (в [BFM_2] оно обозначено через $\alpha^\cdot$) и сопоставляет локально-свободному пучку (алгебраическому векторному расслоению) ассоциированное с ним топологическое векторное расслоение. Для отображения из X в точку преобразование α совпадает с построенным в [BFM_2] отображением α_* из группы Гротендика $K_0^{alg}X$ когерентных пучков на X в топологическую группу K-гомологий $K_0^{top}X$, построенную в [BFM_2].

Для собственных морфизмов $f: X\to Y$ свойство ковариант-

<u>ности</u>, т.е. коммутативность квадрата

$$\begin{tikzcd}
K_0^{alg}X \arrow[r, "\alpha_\cdot"] \arrow[d, "f_*"'] & K_0^{top}X \arrow[d, "f_*"] \\
K_0^{alg}Y \arrow[r, "\alpha_\cdot"] & K_0^{top}Y
\end{tikzcd}$$

является частным случаем перестановочности α со взятием прямого образа. <u>Модульное свойство</u>, т.е. коммутативность квадрата

$$\begin{tikzcd}
K^0_{alg}X \otimes K_0^{alg}X \arrow[r, "\alpha^\cdot \otimes \alpha_\cdot"] \arrow[d, "\otimes"'] & K^0_{top}X \otimes K_0^{top}X \arrow[d, "\cap"] \\
K_0^{alg}X \arrow[r, "\alpha_\cdot"] & K_0^{top}X
\end{tikzcd}$$

является частным случаем перестановочности α с произведениями.

Из утверждения о перестановочности α с произведениями вновь получается утверждение из $[BFM_2]$ о перестановочности α с внешними произведениями $K_0(X_1)\otimes K_0(X_2)\to K_0(X_1\times X_2)$. Следующее следствие лишь упомянуто, но не доказано в $[BFM_2]$.

СЛЕДСТВИЕ. <u>Пусть</u> $f: X\to Y$ — <u>морфизм а.п.п. Тогда диаграммы</u>

$$\begin{tikzcd}
K^0_{alg}X \arrow[r, "\alpha^\cdot"] \arrow[d, "f_!"'] & K^0_{top}X \arrow[d, "f_!"] \\
K^0_{alg}Y \arrow[r, "\alpha^\cdot"'] & K^0_{top}Y
\end{tikzcd}$$ (SGA-6)

и

$$\begin{tikzcd}
K_0^{alg}Y \arrow[r, "\alpha_\cdot"] \arrow[d, "f^!"'] & K_0^{top}Y \arrow[d, "f^!"] \\
K_0^{alg}X \arrow[r, "\alpha_\cdot"'] & K_0^{top}X
\end{tikzcd}$$ (Вердье)

<u>коммутативны.</u>

Гомоморфизмы Гизина $f_!$ и $f^!$ в K_{alg} (соотв. в K_{top}) определены здесь в соответствии с общим формализмом, развитым в § 2.6 ч. I, по каноническим ориентациям $\mathcal{O}_f$ (соотв. Λ_f), построенным в § 2.3. В первой диаграмме морфизм f считается собственным. Во второй диаграмме содержится утверждение о согласованности с взятием ограничений на открытые подсхемы.

Как было отмечено в [BFM_2], на всяком многообразии с особенностями X имеется естественная ориентация $\{X\} = \alpha(\mathcal{O}_X) \in K_0^{top}X$, которая согласуется с обычной ориентацией, если X – комплексное неособое многообразие. В действительности из утверждения 3) теоремы Римана – Роха следует, что любой морфизм $f: X \longrightarrow Y$ конечной Tor-размерности имеет каноническую ориентацию

$$\Lambda_f = \alpha(\mathcal{O}_f) \in K_{top}(X \xrightarrow{f} Y).$$

Эти ориентации ведут себя должным образом по отношению к взятию композиции отображений и (Tor-независимых) обратных образов и совпадают с описанными в § 2.3 ориентациями, в случае когда f – морфизм л.п.п. Используя эти ориентации для задания гомоморфизмов Гизина в K_{top}, можно дать обобщение предыдущего следствия на произвольные морфизмы конечной Tor-размерности. Например, если $f: X \longrightarrow Y$ – произвольный морфизм конечной Tor-размерности, то

$$f^*\{Y\} = \{X\}.$$

Если схема X проективна, то из свойства ковариантности, примененного к отображению f из X в точку, получаем

$$f_*\{X\} = \chi(X, \mathcal{O}_X) = \sum (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{O}_X)$$

в $K_0^{top}(pt) = \mathbb{Z}$.

Если морфизм $f: X \longrightarrow Y$ – плоский и собственный, а схема Y связна, то арифметический род слоя $X_y = f^{-1}(y)$ не зависит от y. Более того, специализацией класса ориентации общего слоя является класс ориентации специального слоя. Согласно формализму, развитому в § 3.4 ч. I, это вытекает из следующего частного случая свойства перестановочности α со взятием обратного образа.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – плоский морфизм, $y \in Y$ и $i: \{y\} \to Y$ – вложение. Тогда

$$i^* \alpha(\mathcal{O}_f) = \{X_y\}$$

в $K_{top}(X_y \longrightarrow \{y\}) = K_0^{top}(X_y)$.

§ 2.5. Характер Чженя

Рассмотрим преобразование Гротендика

$$ch: K_{top} \longrightarrow H_{\mathbb{Q}}$$

из топологической K-теории в гомологии с рациональными коэффициентами, соответствующее характеру Чженя в когомологиях (§ 3.2 ч. I). Для всякого морфизма к.п.п. $f: X \to Y$ канонические ориентации Λ_f в $K_{top}(X \xrightarrow{f} Y)$ и U_f в $H(X \xrightarrow{f} Y)$ связаны между собой формулой Римана – Роха

$$ch(\Lambda_f) = td(T_f) \cdot U_f . \tag{2}$$

Эта формула следует из данного в § 2.3 описания этих классов и формального тождества

$$ch(\Lambda_Q) = td(Q)^{-1} \cdot U_Q$$

в $H^*(Q, Q \setminus \{0\})$, справедливого для любого векторного расслоения Q.

Определим преобразование Гротендика

$$\tau: K_{alg} \longrightarrow H_{\mathbb{Q}}$$

как композицию $\tau = ch \circ \alpha$. Все утверждения § 1.2 относительно τ немедленно вытекают из соответствующих утверждений относительно α.

§ 2.6. Теорема Римана – Роха для теорий с носителями

Если комплекс E^* векторных расслоений точен вне некоторого компактного подмногообразия, то его характер Чженя лежит в когомологиях с компактными носителями. Это свойство обобщается на преобразование Гротендика бивариантных теорий. Определим группу $\overline{K}_{alg}(X \xrightarrow{f} Y)$, как это сделано в § 2.1, но используя

лишь те f-совершенные комплексы, пучки гомологий которых имеют компактные носители. Рассмотрим бивариантные теории $\overline{K}_{top}$ и $\overline{H}_{Q}$ с носителями, построенные по теориям K_{top} и H_{Q} с помощью процедуры п. 3.3.2 ч. I. Тогда существуют преобразования Гротендика

$$\overline{K}_{alg} \xrightarrow{\overline{\alpha}} \overline{K}_{top} \xrightarrow{\overline{ch}} \overline{H}_{Q}\,.$$

Преобразование $\overline{\alpha}$ получается точным копированием конструкции для преобразования α; преобразование $\overline{ch}$ строится из обычного характера Черна с помощью перехода к пределу. Если обозначить композицию $\overline{ch}\circ\overline{\alpha}$ через $\overline{\tau}$, то ассоциированное преобразование $\overline{\tau}_*$ принимает значения в обычных (сингулярных) гомологиях.

Глава 3

КОМПЛЕКСЫ

В этой главе под <u>комплексом</u> $E^{\cdot}$ в аддитивной категории понимается ограниченный сверху комплекс

$$\ldots \longrightarrow E^{p} \xrightarrow{d^{p}} E^{p+1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow E^{q} \longrightarrow 0$$

степени +1 (т.е. $d^{p+1}d^{p}=0$). Объекты E^{p} называются <u>компонентами</u> комплекса $E^{\cdot}$. Аналогично <u>двойной комплекс</u> $E^{\cdot\cdot}$ состоит из объектов $E^{p,q}$, причем $E^{p,q}=0$ при $p\gg 0$ или $q\gg 0$, и границ $d_{I}^{p,q}: E^{p,q} \longrightarrow E^{p+1,q}$, $d_{II}^{p,q}: E^{p,q} \longrightarrow E^{p,q+1}$, для которых $d_{I}d_{I}=0=d_{II}d_{II}$ и $d_{I}d_{II}=d_{II}d_{I}$. Двойной комплекс можно интерпретировать как комплекс комплексов любым из следующих двух способов:

$$\ldots \longrightarrow E^{p,\cdot} \xrightarrow{d_{I}} E^{p+1,\cdot} \longrightarrow \ldots$$

или

$$\ldots \longrightarrow E^{\cdot,q} \xrightarrow{d_{II}} E^{\cdot,q+1} \longrightarrow \ldots .$$

<u>Полный комплекс</u> $\mathrm{tot}\,(E^{\cdot\cdot})$ – это обычный комплекс, n-й компонентой которого является $\bigoplus_{p+q=n} E^{p,q}$, с границей $d^{n}=\sum d_{I}^{p,q}+(-1)^{p}\sum d_{II}^{p,q}$. Комплекс обычный или двойной называется <u>ограниченным</u>, если все его компоненты, кроме конечного числа, нулевые.

§ 3.1. Топологические комплексы

Рассмотрим ограниченные комплексы $E^{\cdot}$ топологических векторных расслоений на топологическом пространстве. Как и в гл. 3 ч. I, предполагается, что все рассматриваемые пространства допускают замкнутые вложения в евклидовы пространства.

3.1.1. ЛЕММА. *Пусть эпиморфизм $\varphi^{\cdot}: E^{\cdot} \longrightarrow E^{\cdot\prime}$ комплексов топологических векторных расслоений таков, что комплекс $L^{\cdot} = \ker(\varphi^{\cdot})$, задаваемый ядром этого эпиморфизма, точен. Тогда существует такой морфизм комплексов $\psi^{\cdot}: E^{\cdot} \longrightarrow L^{\cdot}$, для которого индуцированное отображение*

$$E^{\cdot} \xrightarrow{\varphi^{\cdot} \oplus \psi^{\cdot}} E^{\cdot\prime} \oplus L^{\cdot}$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Комплекс $L^{\cdot}$ расщепляется в прямую сумму комплексов $V(n)^{\cdot}$, $a \leqslant n \leqslant b$, где $V(n)^{\cdot}$ имеет ненулевые компоненты только в размерностях $n-1$ и n. Последовательно расщепляя комплексы $V(n)^{\cdot}$ при $n = b, b-1, \dots$, можно построить подкомплекс $F^{\cdot}$ в $E^{\cdot}$, такой что $L^{\cdot} \oplus F^{\cdot} = E^{\cdot}$. Подробности предоставляем читателю.

3.1.2. Пусть A – открытое подпространство пространства X. Определим $K(X,A)$ как факторгруппу свободной абелевой группы, порожденной классами изоморфных комплексов $E^{\cdot}$ векторных расслоений на X, точных на A, по модулю соотношений: (i) $[E^{\cdot}] = [E^{\cdot\prime}] + [E^{\cdot\prime\prime}]$, если существует точная последовательность $0 \longrightarrow E^{\cdot\prime} \longrightarrow E^{\cdot} \longrightarrow E^{\cdot\prime\prime} \longrightarrow 0$; ($ii$) $[E^{\cdot}] = 0$, если комплекс $E^{\cdot}$ точен на X; (iii) $[E^{\cdot}(0)] = [E^{\cdot}(1)]$, если комплекс $E^{\cdot}$ на $X \times [0,1]$ точен на $A \times [0,1]$. Функтор $(X,A) \mapsto K(X,A)$ контравариантен относительно отображений пар, и тензорное произведение комплексов определяет внешние произведения

$$K(X,A) \otimes K(Y,B) \xrightarrow{\times} K(X \times Y, X \times B \cup A \times Y).$$

Пусть K^0_{top} – чётная часть топологических K-когомологий, рассмотренная в § 3.1 ч. I. Для построения формулы Римана – Роха нам нужны контравариантные гомоморфизмы

$$K(X,A) \longrightarrow K^0_{top}(X,A),$$

согласованные с произведениями. Эти гомоморфизмы задаются разностной конструкцией расслоений, описанной в [BFM$_2$, прил. I]. В действительности эти гомоморфизмы являются изоморфизмами. Нам достаточно, чтобы X было полиэдром, а A – дополнением к подполиэдру. В этом случае можно воспользоваться результатами работы [BFM$_2$].

3.1.3. Комплекс векторных расслоений $E^{\cdot}$ на пространстве X задает в каждой точке x из X комплекс векторных пространств $E^{\cdot}(x)$. Любая компонента $E^{p,\cdot}(x)$ двойного комплекса $E^{\cdot\cdot}$ является комплексом векторных пространств, q-й группой гомологий которого служит

$$H^q_{II}(E^{p,\cdot}(x)) = \operatorname{Ker}(d^{p,q}_{II}(x))\operatorname{Im}(d^{p,q-1}_{II}(x)).$$

Для произвольного открытого подпространства A в X рассмотрим ограниченные двойные комплексы $E^{\cdot\cdot}$ на X, удовлетворяющие условию

(*) Для всех $x \in A$ и всех q комплекс

$$\dots \longrightarrow H^q_{II}(E^{p,\cdot}(x)) \longrightarrow H^q_{II}(E^{p+1,\cdot}(x)) \longrightarrow \dots$$

(границы в котором индуцированы отображениями $d_I(x)$) точен.

Полный комплекс $\operatorname{tot}(E^{\cdot\cdot})$, соответствующий любому такому двойному комплексу $E^{\cdot\cdot}$, представляет собой ограниченный комплекс векторных расслоений на X, точный на A, и, следовательно, определяет некоторый элемент $[\operatorname{tot}(E^{\cdot\cdot})]$ из $K(X, A)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть двойные комплексы* $E^{\cdot\cdot}$, $\bar{E}^{\cdot\cdot}$ *удовлетворяют условию* (*). *Предположим, что для всех* p, q *существуют эпиморфизмы векторных расслоений* $\varphi^{p,q}$ *из* $E^{p,q}$ *в* $\bar{E}^{p,q}$, *такие что*

1) φ *коммутирует с границами* d_{II}, *т.е.* $d^{p,q}_{II}\varphi^{p,q} = \varphi^{p,q+1} d^{p,q}_{II}$ *для всех* p, q;

2) *для всех* p, q *и всех* $x \in X$ *отображения*

$$H^q_{II}(E^{p,\cdot}(x)) \longrightarrow H^q_{II}(\bar{E}^{p,\cdot}(x)),$$

индуцированные эпиморфизмом φ, *являются изоморфизмами;*

3) для всех p, q и всех $x \in A$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^q_{II}(E^{p,\cdot}(x)) & \longrightarrow & H^q_{II}(E^{p+1,\cdot}(x)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q_{II}(\bar{E}^{p,\cdot}(x)) & \longrightarrow & H^q_{II}(\bar{E}^{p+1,\cdot}(x)) \end{array}$$

в которой горизонтальные отображения индуцированы граничными гомоморфизмами d_I, а вертикальные – эпиморфизмом γ.

Тогда $[\operatorname{tot} E^{\cdot\cdot}] = [\operatorname{tot} \bar{E}^{\cdot\cdot}]$ в $K(X, A)$.

Доказательство. В силу условия 2), ядро $L^{p,\cdot}$ каждого из эпиморфизмов $\gamma^{p,\cdot}: E^{p,\cdot} \to \bar{E}^{p,\cdot}$ является точным комплексом. Рассмотрим $L^{\cdot\cdot}$ как двойной комплекс с $d_I = 0$. Согласно предыдущей лемме, существуют гомоморфизмы $\psi^{p,\cdot}: E^{p,\cdot} \to L^{p,\cdot}$, такие что $\gamma^{p,\cdot} \oplus \psi^{p,\cdot}$ осуществляет изоморфизм $E^{p,\cdot}$ на $\bar{E}^{p,\cdot} \oplus L^{p,\cdot}$. Заменяя $\bar{E}^{\cdot\cdot}$ на $\bar{E}^{\cdot\cdot} \oplus L^{\cdot\cdot}$, можно считать, что все эпиморфизмы $\gamma^{p,q}$ суть изоморфизмы векторных расслоений.

Рассмотрим двойной комплекс $'E^{\cdot\cdot}$ с теми же компонентами и тем же граничным гомоморфизмом d_{II}, что и у комплекса $E^{\cdot\cdot}$, но с граничным гомоморфизмом $'d_I$, определяемым по соответствующему граничному гомоморфизму комплекса $\bar{E}^{\cdot\cdot}$ с помощью γ, т.е.

$$'E^{p,q} = E^{p,q},\ 'd_{II}^{p,q} = d_{II}^{p,q},\ 'd_I^{p,q} = (\gamma^{p+1,q})^{-1}\bar{d}_I^{p,q}\gamma^{p,q}.$$

Ясно, что γ осуществляет изоморфизм комплексов $'E^{\cdot\cdot}$ и $\bar{E}^{\cdot\cdot}$, и остается лишь показать, что $[\operatorname{tot} {}'E^{\cdot\cdot}] = [\operatorname{tot} E^{\cdot\cdot}]$.

Это достигается прямым построением гомотопии из $\operatorname{tot} {}'E^{\cdot\cdot}$ в $\operatorname{tot} E^{\cdot\cdot}$. Рассмотрим проекцию $pr: X \times [0,1] \to X$ и введем комплекс $\tilde{E}^{p,q} = pr^* E^{p,q}$, где $\tilde{d}_{II}^{p,q} = pr^*(d_{II}^{p,q})$ и $\tilde{d}_I^{p,q} = t \cdot d_I^{p,q} + (1-t)\, 'd_I^{p,q}$ в точке (x, t). Тогда $\tilde{E}^{\cdot\cdot}$ является двойным комплексом на $X \times [0, 1]$ и для всех (x, t) из $X \times [0, 1]$ и всех q комплексы

$$\ldots \to H^q_{II}(\tilde{E}^{p,\cdot}(x,t)) \to H^q_{II}(\tilde{E}^{p+1,\cdot}(x,t)) \to \ldots$$

(с границей, индуцированной $\tilde{d}_I$) и

$$\ldots \to H^q_{II}(E^{p,\cdot}(x)) \to H^q_{II}(E^{p+1,\cdot}(x)) \to \ldots$$

(с границей, индуцированной d_I или $'d_I$, – в силу предположе-

ния 3) это одно и то же) изоморфны. Следовательно, для $x \in A$ эти комплексы точны. Поэтому комплекс $\mathrm{tot}(\tilde{E}^{\cdot\cdot})$ на $X \times [0, 1]$ точен на $A \times [0, 1]$, причем его ограничением при $t=1$ служит комплекс $\mathrm{tot}(E^{\cdot\cdot})$, а при $t=0$ - комплекс $\mathrm{tot}('E^{\cdot\cdot})$, что и завершает доказательство.

3.1.4. В § 3.4 нам потребуется также следующее утверждение.

ЛЕММА. Пусть Y - замкнутое подпространство в Z; предположим, что Y является окрестностным деформационным ретрактом в Z. Пусть, далее, $F^{\cdot}$ - ограниченный комплекс топологических векторных расслоений над Y с граничными гомоморфизмами d^P: $F^P \longrightarrow F^{P+1}$. Предположим, что каждое расслоение F^P продолжается до векторного расслоения $\tilde{F}^P$ над Z. Тогда существуют граничные гомоморфизмы $\tilde{d}^P : \tilde{F}^P \longrightarrow \tilde{F}^{P+1}$, продолжающие гомоморфизмы d^P и превращающие $\tilde{F}^{\cdot}$ в комплекс на Z (т.е. $\tilde{d}^{P+1} \circ \tilde{d}^P = 0$).

Доказательство. Возьмем окрестность U подпространства Y в Z, деформационным ретрактом которой является Y. С помощью этой ретракции продолжим $F^{\cdot}$ до комплекса F_U векторных расслоений над U с граничными гомоморфизмами $d_U^P : F_U^P \longrightarrow F_U^{P+1}$. Поскольку все продолжения расслоения F^P на U изоморфны, можно считать, что $F_U^P = \tilde{F}^P|_U$. Поэтому можно положить $\tilde{d}^P = \varphi \cdot d_U^P$, где φ - произвольная непрерывная функция, равная 1 на Y и нулю в некоторой окрестности подпространства $Z \setminus U$.

§ 3.2. Немного гомологической алгебры

В этом параграфе рассматриваются абелева категория $\mathcal{C}$ и набор $\mathcal{F}$ ее объектов, такой что каждый объект категории $\mathcal{C}$ является гомоморфным образом некоторого объекта из $\mathcal{F}$; предположим также, что набор $\mathcal{F}$ замкнут относительно образования конечных прямых сумм. Например, в качестве категории $\mathcal{C}$ можно взять категорию когерентных пучков на квазипроективной схеме, а в качестве $\mathcal{F}$ - совокупность всех локально-свободных пучков. Если пара $(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ удовлетворяет указанным предположениям, то, как хорошо известно (и как вытекает из приводимой ниже леммы), этим же предположениям удовлетворяет пара $(\mathcal{C}', \mathcal{F}')$, где $\mathcal{C}'$ - категория всех (ограниченных сверху) комплексов в категории $\mathcal{C}$, а $\mathcal{F}'$ состоит из всех комплексов, объекты которых лежат в $\mathcal{F}$.

3.2.1. ЛЕММА. Пусть $A^{\cdot}$ - комплекс в категории $\mathcal{C}$. Предположим, что для каждого n заданы морфизмы $\alpha^n : A^n \longrightarrow B^n$ и эпиморфизмы $\beta^n : C^n \longrightarrow B^n$. Тогда существует комплекс $E^{\cdot}$ в $\mathcal{C}$ с $E^n \in \mathcal{F}$,

эпиморфизм комплексов $\gamma^\cdot : E^\cdot \to A^\cdot$ и для каждого n морфизм $\delta^n : E^n \to C^n$, такие что диаграмма

$$\begin{tikzcd} E^n \arrow[r, "\delta^n"] \arrow[d, "\gamma^n"'] & C^n \arrow[d, "\beta^n"] \\ A^n \arrow[r, "\alpha^n"'] & B^n \end{tikzcd}$$

коммутативна. Если все α^n являются эпиморфизмами, то и все δ^n и все индуцированные отображения $Ker(\gamma^n) \to Ker(\beta^n)$ также можно выбрать эпиморфизмами.

Доказательство. Прежде всего рассмотрим расслоенные квадраты

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r, "\bar{\alpha}^n"] \arrow[d, "\bar{\beta}^n"'] & C^n \arrow[d, "\beta^n"] \\ A^n \arrow[r, "\alpha^n"'] & B^n \end{tikzcd}$$

Мы хотим построить комплекс $E^\cdot$ с компонентами $E^n \in \mathcal{F}$ и эпиморфизмы $\bar{\delta}^n : E^n \to D^n$, такие что гомоморфизмы $\gamma^n = \bar{\beta}^n \circ \bar{\delta}^n$ определяют морфизм комплексов $\gamma^\cdot$. После этого не составляет труда проверить, что построенные $E^\cdot$, $\gamma^\cdot$ и $\delta^n = \bar{\alpha}^n \circ \bar{\delta}^n$ удовлетворяют предъявляемым требованиям.

Пусть $d^n : A^n \to A^{n+1}$ - граничный гомоморфизм комплекса $A^\cdot$. Выберем $F^n \in \mathcal{F}$ и построим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} F^n \arrow[r, "e^n"] \arrow[d, "\varepsilon^n"'] & D^{n+1} \arrow[d, "\bar{\beta}^{n+1}"] \\ D^n \arrow[r, "d^n \circ \bar{\beta}^n"'] & A^{n+1} \end{tikzcd}$$

в которой F^n эпиморфно отображается на расслоенное произведение объектов D^n и D^{n+1} над A^{n+1}.

Рассмотрим теперь комплекс $E^n = F^n \oplus F^{n-1}$ с граничным

гомоморфизмом $d^n : E^n \longrightarrow E^{n+1}$, заданным формулой $d^n(x,y)=(0,x)$, и определим гомоморфизм $\delta^n : E^n \longrightarrow D^n$ формулой $\delta^n(x,y)=\xi^n(x)+e^{n-1}(y)$. Легко проверить, что индуцированное отображение $\gamma^n=\bar{\beta}^n\circ\delta^n$ коммутирует с граничными гомоморфизмами комплексов $E^\cdot$ и $A^\cdot$.

3.2.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть, как и выше, $A^\cdot$ – ограниченный комплекс в абелевой категории $\mathcal{C}$ с выделенным семейством $\mathcal{F}$. Предположим, что для каждого n выделена резольвента

$$\ldots\longrightarrow C^{n,q}\longrightarrow C^{n,q+1}\longrightarrow\ldots\longrightarrow C^{n,0}\longrightarrow A^n\longrightarrow 0.$$

Тогда существует двойной комплекс $E^{\cdot\cdot}$, являющийся резольвентой комплекса $A^\cdot$, т.е. точная последовательность комплексов

$$\ldots\longrightarrow E^{\cdot,q}\longrightarrow E^{\cdot,q+1}\longrightarrow\ldots\longrightarrow E^{\cdot,0}\longrightarrow A^\cdot\longrightarrow 0,$$

в которой $E^{p,q}\in\mathcal{F}$, и для каждого n сюръективный квазиизоморфизм комплексов $E^{n,\cdot}\longrightarrow C^{n,\cdot}$, такие что диаграмма

$$\begin{tikzcd} E^{n0} \arrow[rr] \arrow[dr] & & C^{n0} \arrow[dl] \\ & A^n & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Применим лемму к комплексу $A^\cdot$ с тождественными отображениями α^n из A^n в A^n и эпиморфизмами β^n из $C^{n,0}$ в A^n, заданными условием предложения. Получим комплекс $E^{\cdot,0}$ с компонентами из $\mathcal{F}$, эпиморфизм комплексов $E^{\cdot,0}\longrightarrow A^\cdot$ и для каждого n эпиморфизм $E^{n,0}\longrightarrow C^{n,0}$, такие что диаграмма

$$\begin{tikzcd} E^{n0} \arrow[r] \arrow[d] & C^{n0} \arrow[d] \\ A^n \arrow[r, equal] & A^n \end{tikzcd}$$

коммутативна. Пусть $K^\cdot=\mathrm{Ker}(E^{\cdot,0}\longrightarrow A^\cdot)$, $L^n=\mathrm{Ker}(C^{n,0}\longrightarrow A^n)$. Существуют индуцированные эпиморфизмы $K^n\longrightarrow L^n$. Повторив эту процедуру, построим комплекс $E^{\cdot,-1}$ с компонентами из $\mathcal{F}$, эпиморфизм комплексов $E^{\cdot,-1}\longrightarrow K^\cdot$ и эпиморфизмы $E^{n,-1}\longrightarrow C^{n,-1}$,

такие что диаграммы

$$\begin{tikzcd} E^{n,-1} \arrow[r] \arrow[d] & C^{n,-1} \arrow[d] \\ K^{n} \arrow[r] & L^{n} \end{tikzcd}$$

коммутативны, а индуцированные отображения ядер вертикальных стрелок сюръективны. Продолжая эту процедуру, получим искомую резольвенту $E^{\cdot\cdot}$ комплекса $A^{\cdot}$ и искомые квазиизоморфизмы $E^{n,\cdot}$ в $C^{n,\cdot}$.

§ 3.3. Одно приложение

В этом параграфе мы применим результаты § 2.2 из гомологической алгебры к когерентным пучкам на квазипроективных многообразиях. Как всегда, все комплексы ограничены сверху.

3.3.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $j : Y \to Z$ – замкнутое вложение квазипроективных схем и $F^{\cdot}$ – комплекс локально-свободных пучков на Y, такой что при каждом p существует локально-свободный пучок $\tilde{F}^{p}$ на Z, для которого $j^{*}(\tilde{F}^{p}) = F^{p}$. Пусть, далее, $\mathcal{B}^{\cdot}$ – комплекс локально-свободных пучков на Y. Тогда существуют:

1) комплекс $G^{\cdot}$ локально-свободных пучков на Z и квазиизоморфизм $G^{\cdot} \to j_{*}(\mathcal{B}^{\cdot})$;

2) двойной комплекс $E^{\cdot\cdot}$ локально-свободных пучков на Z и морфизм двойных комплексов

$$E^{\cdot\cdot} \to j_{*}(F^{\cdot} \otimes \mathcal{B}^{\cdot});$$

3) для каждого p сюръективный квазиизоморфизм $E^{p,\cdot} \to \tilde{F}^{p} \otimes G^{\cdot}$,

такие что диаграмма

$$\begin{tikzcd} E^{p,\cdot} \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{F}^{p} \otimes G^{\cdot} \arrow[d] \\ j_{*}(F^{p} \otimes \mathcal{B}^{\cdot}) \arrow[r, phantom, "="] & \tilde{F}^{p} \otimes j_{*}(\mathcal{B}^{\cdot}) \end{tikzcd}$$

коммутативна (правое вертикальное отображение индуцировано отображением 1), а левое вертикальное отображение – отображением 2)). Следовательно, каждое отображение $E^{p,\cdot} \to j_{*}(F^{p} \otimes \mathcal{B}^{\cdot})$ является квазиизоморфизмом.

Доказательство. Пусть $\mathcal{C}$ – категория комплексов когерентных пучков на Z, а $\mathcal{F}$ – те комплексы, компоненты которых локально-свободны. Выберем какую-нибудь резольвенту комплекса $j_*(\mathcal{B}^\cdot)$ по объектам из $\mathcal{F}$, т.е. точную последовательность комплексов

$$\ldots \to G^{p,\cdot} \to G^{p+1,\cdot} \to \ldots \to G^{0,\cdot} \to j_*(\mathcal{B}^\cdot) \to 0$$

локально-свободных пучков $G^{p,q}$ на Z.

Двойной комплекс $j_*(F^\cdot \otimes \mathcal{B}^\cdot)$ можно считать комплексом в категории $\mathcal{C}$:

$$\ldots \to j_*(F^n \otimes \mathcal{B}^\cdot) \to j_*(F^{n+1} \otimes \mathcal{B}^\cdot) \to \ldots,$$

и каждый объект $j_*(F^n \otimes \mathcal{B}^\cdot) = \tilde{F}^n \otimes j_*(\mathcal{B}^\cdot)$ имеет выделенную резольвенту:

$$\tilde{F}^n \otimes G^{p,\cdot} \to \tilde{F}^n \otimes G^{p+1,\cdot} \to \ldots \to \tilde{F}^n \otimes G^{0,\cdot} \to \tilde{F}^n \otimes j_*(\mathcal{B}^\cdot) \to 0.$$

Из предложения 3.2.2 следует поэтому, что существуют двойной комплекс в $\mathcal{C}$, который является тройным комплексом $E^{\cdot\cdot\cdot}$ локально-свободных пучков на Z, коммутативная диаграмма комплексов

$$\begin{array}{ccccc}
\ldots \to & E^{p,q,\cdot} & \to & E^{p+1,q,\cdot} & \to \ldots \\
& \downarrow & & \downarrow & \\
\ldots \to & E^{p,q+1,\cdot} & \to & E^{p+1,q+1,\cdot} & \to \ldots \\
& \downarrow & & \downarrow & \\
& \vdots & & \vdots & \\
& \downarrow & & \downarrow & \\
\ldots \to & E^{p,0,\cdot} & \to & E^{p+1,0,\cdot} & \to \ldots \\
& \downarrow & & \downarrow & \\
\ldots \to & j_*(F^p \otimes \mathcal{B}^\cdot) & \to & j_*(F^{p+1} \otimes \mathcal{B}^\cdot) & \to \ldots
\end{array}$$

с точными столбцами и для каждого p сюръективный морфизм $E^{p,\cdot,\cdot} \longrightarrow \tilde{F}^p \otimes G^{\cdot\cdot}$ двойных комплексов, являющийся квазиизоморфизмом относительно средней градуировки.

Пусть теперь $G^{\cdot} = tot(G^{\cdot\cdot})$, а двойной комплекс $E^{\cdot\cdot}$ представляет собой амальгаму по второй и третьей градуировкам (так что $E^{p,\cdot} = tot(E^{p,\cdot,\cdot})$). Тогда определены индуцированные квазиизоморфизмы $G^{\cdot} \longrightarrow j_*(\mathcal{B}^{\cdot})$ и $E^{p,\cdot} \longrightarrow \tilde{F}^p \otimes G^{\cdot}$ и отображение двойных комплексов $E^{\cdot\cdot} \longrightarrow j_*(F^{\cdot} \otimes \mathcal{B}^{\cdot})$, которые, как легко видеть, удовлетворяют условиям 1) – 3).

3.3.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Если комплекс $F^{\cdot}$ ограничен, а комплекс $j_*(\mathcal{B}^{\cdot})$ квазиизоморфен некоторому ограниченному комплексу локально-свободных пучков на Z, то комплекс $G^{\cdot}$ и двойной комплекс $E^{\cdot\cdot}$ из предыдущего предложения можно выбрать ограниченными. Действительно, если $G^{\cdot}$ и $E^{\cdot\cdot}$ – построенные в этом предложении комплексы, то для некоторого $q \ll 0$ подкомплекс

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(d^q) \longrightarrow G^q \xrightarrow{d^q} G^{q+1} \longrightarrow \dots$$

комплекса $G^{\cdot}$ локально-свободен и квазиизоморфен комплексу $G^{\cdot}$, а комплексы

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_{II}^{p,q}) \longrightarrow E^{p,q} \xrightarrow{d_{II}^{p,q}} E^{p,q+1} \longrightarrow \dots$$

локально-свободны и квазиизоморфны комплексу $E^{p,\cdot}$. Поэтому $G^{\cdot}$ и $E^{\cdot\cdot}$ можно заменить этими срезанными комплексами, которые уже ограничены.

§ 3.4. Основная лемма

Пусть $i: X \longrightarrow Y$, $j: Y \longrightarrow Z$ – замкнутые вложения комплексных квазипроективных схем, и пусть $k = j \circ i$. Рассмотрим i-совершенный комплекс $\mathcal{A}^{\cdot}$ на X и j-совершенный комплекс $\mathcal{B}^{\cdot}$ локально-свободных пучков на Y. Пусть $F^{\cdot} \longrightarrow i_*(\mathcal{A}^{\cdot})$, $G^{\cdot} \longrightarrow j_*(\mathcal{B}^{\cdot})$, $E^{\cdot} \longrightarrow tot(k_*(\mathcal{A}^{\cdot} \otimes i^*\mathcal{B}^{\cdot}))$ – резольвенты ограниченных комплексов локально-свободных пучков на Y, Z и Z соответственно. Рассмотрим $F^{\cdot}$ как комплекс топологических векторных расслоений на Y, точных вне X. Тогда $F^{\cdot}$ задает некоторый элемент $[F^{\cdot}]$ из $K^0_{top}(Y, Y \setminus X) = k_{top}(X \xrightarrow{i} Y)$. Аналогично определяются элементы $[G^{\cdot}] \in K_{top}(Y \xrightarrow{j} Z)$ и $[E^{\cdot}] \in K_{top}(X \xrightarrow{k} Z)$.

3.4.1. ЛЕММА. Предположим, что каждая компонента F^p комплекса $F^\cdot$ продолжается до локально-свободного пучка $\tilde{F}^p$ на Z. Тогда

$$[E^\cdot]=[F^\cdot]\cdot[G^\cdot] \quad \text{в} \quad K_{top}(X \xrightarrow{k} Y).$$

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Произведение в правой части этого равенства определяется следующим образом (ср. гл. 3 ч. I). Согласно лемме 3.1.4, можно продолжить граничные гомоморфизмы d^n до гомоморфизмов $\tilde{d}^p: \tilde{F}^p \to \tilde{F}^{p+1}$ на Z, превращающих $\tilde{F}^\cdot$ в комплекс топологических векторных расслоений на Z. Тогда произведением $[F^\cdot]\cdot[G^\cdot]$ является $[\mathrm{tot}(\tilde{F}^\cdot \otimes G^\cdot)]$. Отметим, что в общем случае эти продолжения нельзя выбрать аналитическими.

2. В гл. 4 предположение о существовании алгебраических продолжений расслоений F^p на пространство Z будет снято.

Доказательство. Наше утверждение не зависит от выбора комплексов $G^\cdot$ и $E^{\cdot\cdot}$. Применяя предложение 3.3.1, построим $G^\cdot$, $G^\cdot \to j_*\mathcal{B}$, $E^{\cdot\cdot}$, $E^{\cdot\cdot} \to j_*(F^\cdot \otimes \mathcal{B}^\cdot)$ и $E^{p,\cdot} \longrightarrow \tilde{F}^p \otimes G^\cdot$, удовлетворяющие заключению этого предложения. Поскольку каждое отображение $E^{p,\cdot} \to j_*(F^p \otimes \mathcal{B}^\cdot)$ есть квазиизоморфизм, морфизмы

$$\mathrm{tot}(E^{\cdot\cdot}) \to \mathrm{tot}(j_*(F^\cdot \otimes \mathcal{B}^\cdot)) \to \mathrm{tot}(j_*(i_*\mathcal{A}^\cdot \otimes \mathcal{B}^\cdot)) = \mathrm{tot}(k_*(\mathcal{A}^\cdot \otimes i^*\mathcal{B}^\cdot))$$

тоже являются квазиизоморфизмами, поэтому мы положим $E^\cdot = \mathrm{tot}(E^{\cdot\cdot})$.

Применим теперь предложение 3.1.8 к двойным комплексам $E^{\cdot\cdot}$ и $\bar{E}^{\cdot\cdot} = \tilde{F}^\cdot \otimes G^\cdot$ (с границей d_I, индуцированной $\tilde{d}^\cdot$) и выбранным выше отображениям $E^{p,q} \to \bar{E}^{p,q} = \tilde{F}^p \otimes G^q$. Нужное нам равенство $[\mathrm{tot}\, E^{\cdot\cdot}] = [\mathrm{tot}\, \bar{E}^{\cdot\cdot}]$ в $K^0_{top}(Z, Z \setminus X)$ будет доказано, если проверить выполнение условий 1) – 3) этого предложения. Первые два условия очевидны. Что касается третьего, то заметим, что $E^{p}\longrightarrow j_*(F^p \otimes \mathcal{B}^\cdot)$ является резольвентой для всех p. Поэтому для каждой точки $z \in Z$ выполнено равенство

$$H^q_{II}(E^{p,\cdot}(z)) = \mathrm{Tor}^q_Z(j_*(F^p \otimes \mathcal{B}^\cdot), \varkappa(z)),$$

где $\varkappa(z)$ – поле вычетов ограничения структурного пучка $\mathcal{O}_{Z,z}$,

изоморфное $\mathbb{C}$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H^q_{\mathrm{II}}(E^{p,\cdot}(z)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^q_{\mathrm{II}}(E^{p+1,\cdot}(z)) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Tor}^q_Z(j_*(F^p \otimes \mathcal{B}^\cdot), \mathscr{K}(z)) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Tor}^q_Z(j_*(F^{p+1} \otimes \mathcal{B}^\cdot), \mathscr{K}(z)) \arrow[d, "\wr"] \\
H^q(\tilde{F}^p \otimes G^\cdot(z)) \arrow[r] & H^q(\tilde{F}^{p+1} \otimes G^\cdot(z))
\end{tikzcd}$$

в которой средний горизонтальный гомоморфизм индуцирован гомоморфизмом $d^p : F^p \to F^{p+1}$, а нижний горизонтальный гомоморфизм - гомоморфизмом $\tilde{d}^p : \tilde{F}^p \to \tilde{F}^{p+1}$. Заметим, что $\tilde{F}^p \otimes G^\cdot$ является резольвентой комплекса $j_*(F^p \otimes \mathcal{B}^\cdot)$ на Z и что при $z \notin j(Y)$ все группы в диаграмме нулевые. Условие 3) есть условие коммутативности внешнего квадрата в этой диаграмме.

Глава 4

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

В этой главе для краткости будем писать K_a вместо K_{alg} и K_t вместо K_{top}. Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – морфизм комплексных квазипроективных схем. Будем говорить, что морфизм $\varphi: X \longrightarrow M$ <u>разлагает</u> f, если M – неособое многообразие и (f, φ) – замкнутое вложение X в $Y \times M$. Пусть

$$\alpha^{\varphi} = \alpha_f^{\varphi}: K_a(X \xrightarrow{f} Y) \longrightarrow K_t(X \xrightarrow{f} Y)$$

– описанный в § 2.4 гомоморфизм.

<u>4.0.1.</u> ЛЕММА. <u>Если $\varphi: X \longrightarrow M$ разлагает $f: X \longrightarrow Y$ и $i: M \longrightarrow P$ – замкнутое вложение неособых многообразий, то</u> $\alpha_f^{i\varphi} = \alpha_f^{\varphi}$.

<u>Доказательство.</u> Эта лемма обобщает основную теорему из $[BFM_2, \S 2]$ (последняя получается применением данной леммы к случаю, когда Y есть точка). В доказательстве этой теоремы использовалась деформация к нормальному расслоению многообразия M в P; полным пространством для этой деформации является раздутие W многообразия $P \times \mathbb{C}$ вдоль $M \times \{0\}$, и потому существует вложение ψ многообразия $M \times \mathbb{C}$ в W. В нашем случае для доказательства нужно воспользоваться деформацией к нормальному расслоению подмногообразия $Y \times M$ в $Y \times P$; полным пространством для этой деформации будет $Y \times W$, где W то же, что и выше, и каноническим вложением $Y \times M \times \mathbb{C}$ в $Y \times W$ будет $1 \times \psi$.

Доказательство проводится в точности так же, как и в $[BFM_2, \S 2.]$ На последнем шаге доказательства потребуется показать, что гомоморфизм Тома – Гизина

$$(1 \times \psi)_*: K^0_{top}(Y \times M \times \mathbb{C}, Y \times M \times \mathbb{C} \setminus X) \longrightarrow K^0_{top}(Y \times W, Y \times W \setminus X)$$

является изоморфизмом. Это вытекает из того, что ψ, а следовательно, и $1\times\psi$ – нормально неособые отображения с комплексным нормальным расслоением (§ 4.1 ч. I).

4.0.2. ЛЕММА. Пусть $f: X \to Y$ – собственный, а $g: Y \to Z$ – произвольный морфизм. Пусть, далее, $\varphi: X \to M$ разлагает f, причем M – проективное многообразие, а $\psi: Y \to N$ разлагает g. Тогда $(\psi f, \varphi)$ разлагает gf и диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
K_a(X \xrightarrow{gf} Z) & \xrightarrow{\alpha^{(\psi f,\varphi)}} & K_t(X \xrightarrow{gf} Z) \\
\downarrow f_* & & \downarrow f_* \\
K_a(Y \xrightarrow{g} Z) & \xrightarrow{\alpha^{\psi}} & K_t(Y \xrightarrow{g} Z)
\end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. В силу леммы 3.1 можно считать $M = \mathbb{P}^n$. Пусть $i = (f,\varphi)$ – вложение X в $Y\times\mathbb{P}^n$ и p – проекция из $Y\times\mathbb{P}^n$ на Y. Предыдущий квадрат является композицией двух квадратов:

$$\begin{array}{ccc}
K_a(X \xrightarrow{gf} Z) & \xrightarrow{\alpha^{(\psi f,\varphi)}} & K_t(X \xrightarrow{gf} Z) \\
\downarrow i_* & & \downarrow i_* \\
K_a(Y\times\mathbb{P}^n \xrightarrow{gp} Z) & \xrightarrow{\alpha^{\psi\times 1}} & K_t(Y\times\mathbb{P}^n \xrightarrow{gp} Z) \\
\downarrow p_* & & \downarrow p_* \\
K_a(Y \xrightarrow{g} Z) & \xrightarrow{\alpha^{\psi}} & K_t(Y \xrightarrow{g} Z)
\end{array}$$

Коммутативность верхнего квадрата следует непосредственно из определений входящих в него гомоморфизмов. Коммутативность нижнего квадрата легко вытекает (ср. [BFM_2, § 4, (7)]) из двух утверждений:

(i) внешнее произведение (§ 2.4 ч. I)

$$K_a(Y \xrightarrow{g} Z)\otimes K_a(\mathbb{P}^n \to pt) \xrightarrow{\times} K_a(Y\times\mathbb{P}^n \xrightarrow{gp} Z)$$

сюръективно;

(ii) диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
K_a(\mathbb{P}^n \xrightarrow{q} pt) & \xrightarrow{\alpha^{id}} & K_t(\mathbb{P}^n \xrightarrow{q} pt) \\
\downarrow q_* & & \downarrow q_* \\
K_a(pt \longrightarrow pt) & \xrightarrow{\alpha^{id}} & K_t(pt \longrightarrow pt)
\end{array}$$

коммутативна.

Утверждение (ii) можно доказать прямым вычислением, использующим характер Чженя [AH_2] ; чисто геометрическое доказательство дано в [BFM_2 , прил. 3]. Пусть $\mathcal{A}^{\cdot}$ – произвольный $\mathcal{g}$-совершенный комплекс на $Y \times \mathbb{P}^n$. Заменяя, если надо, комплекс $\mathcal{A}^{\cdot}$ квазиизоморфным комплексом, можно считать $\mathcal{A}^{\cdot}$ ограниченным комплексом когерентных пучков. Тензорно домножая $\mathcal{A}^{\cdot}$ на расслоение $\mathcal{O}(m)$ при достаточно большом m, мы можем считать, что каждая компонента $\mathcal{A}^r$ является p-регулярной, т.е. $R^i_{p_*}(A^r \otimes \mathcal{O}(-i)) = 0$ для всех $i > 0$. Для доказательства утверждения (i) достаточно проверить, что существуют g-совершенные комплексы $T_j^{\cdot}$ на Y , $0 \leq j \leq n$, и точная последовательность комплексов

$$0 \to p^*(T_n^{\cdot}) \otimes \mathcal{O}(-n) \to p^*(T_{n-1}^{\cdot}) \otimes \mathcal{O}(-n+1) \to \dots$$

$$\dots \to p^*(T_1^{\cdot}) \otimes \mathcal{O}(-1) \to p^*(T_0^{\cdot}) \to \mathcal{A}^{\cdot} \to 0. \qquad (*)$$

Это, в свою очередь, следует из результатов Квиллена [Qui_1 , § 7.8]. Квиллен построил для произвольного когерентного пучка $\mathcal{A}$ на $Y \times \mathbb{P}^n$ точную последовательность ($*$) , в которой T_i – когерентные пучки на Y. Поскольку эта конструкция функториальна, она продолжается на комплексы. Фактически $T_0^{\cdot} = p_*(\mathcal{A}^{\cdot}) = \mathbb{R}p_*(\mathcal{A}^{\cdot})$, откуда следует g-совершенность комплекса $T_0^{\cdot}$, и из индуктивного построения последовательности ($*$) аналогично вытекает, что все комплексы $T_i^{\cdot}$ являются g-совершенными.

4.0.3. ЛЕММА. Пусть $f: X \to Y$ разлагается с помощью морфизмов $\varphi_i : X \to M_i$, $i = 1, 2$. Тогда $\alpha^{\varphi_1}_f = \alpha^{\varphi_2}_f$.

Доказательство. Так как схема M_i квазипроективна, то, согласно доказательству леммы 3.1, можно считать M_i открытой подсхемой проективного пространства P_i ; пусть j_i – вложение M_i

в P_1. Ввиду симметрии достаточно показать, что $\alpha^{(\varphi_1,\varphi_2)}=\alpha^{\varphi_1}$. Поскольку $(\varphi_1, j_2\varphi_2)$ также разлагает f, а конструкция преобразования α согласуется со взятием ограничений на открытые подсхемы в объемлющем пространстве, имеем $\alpha^{(\varphi_1, j_2\varphi_2)}=\alpha^{(\varphi_1\varphi_2)}$. Применяя лемму 3.2 к композиции $X\xrightarrow{id}X\xrightarrow{f}Y$, где id разлагается с помощью морфизма $j_2\varphi_2$, а f разлагается с помощью φ_1, получаем нужное нам соотношение $\alpha^{(\varphi_1, j_2\varphi_2)}=\alpha^{\varphi_1}$.

4.0.4. Из леммы 3.3 следует независимость гомоморфизма α_f^{φ} от выбора φ, разлагающего морфизм f, поэтому будем обозначать этот морфизм через α_f или просто α. Лемма 3.2 гарантирует перестановочность α со взятием прямых образов. Проверим перестановочность α со взятием обратных образов. Пусть дан Tor-независимый квадрат

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Если $\varphi: X\longrightarrow M$ разлагает f, то $\varphi g'$ разлагает f'. Если резольвентой f-совершенного комплекса $\mathcal{A}^{\cdot}$ является комплекс $\mathcal{E}^{\cdot}$ локально-свободных пучков на $Y\times M$, то $\mathbb{L}g'^{*}(\mathcal{A}^{\cdot})$ будет резольвентой комплекса $(g\times 1)^{*}(\mathcal{E}^{\cdot})$ на $Y'\times M$ ([SGA-6, гл. IV, п. 3.1]), откуда и получается нужное утверждение.

4.0.5. ЛЕММА. Пусть $f: X\longrightarrow Y$ – морфизм, M – неособое многообразие, $\varphi: X\longrightarrow M$ – произвольный морфизм, $p: Y\times M\longrightarrow M$ – проекция. Пусть, далее, $\mathcal{O}_p$, Λ_p – канонические ориентации p в K_a и K_t соответственно. Тогда диаграмма

$$\begin{tikzcd} K_a(X \xrightarrow{(f,\varphi)} Y\times M) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\cdot\mathcal{O}_p", "\cong"'] & K_t(X \xrightarrow{(f,\varphi)} Y\times M) \arrow[d, "\cdot\Lambda_p", "\cong"'] \\ K_a(X \xrightarrow{f} Y) \arrow[r, "\alpha"] & K_t(X \xrightarrow{f} Y) \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Можно заменить f замкнутым вложением схемы X в $Y\times P$, где P неособо. Тогда утверждение леммы является просто переформулировкой факта независимости α от выбора вложения.

4.0.6. Покажем, что α коммутирует с произведениями. Пусть $a\in K_a(X\xrightarrow{f}Y)$, $b\in K_a(Y\xrightarrow{g}Z)$. Нужно доказать равенство

$$\alpha_{gf}(a\cdot b)=\alpha_f(a)\cdot\alpha_g(b)$$

в $K_t(X\xrightarrow{gf}Z)$. Предположим вначале, что f и g – замкнутые вложения. Пусть представителем для a является f-совершенный комплекс $\mathcal{A}^{\cdot}$ на X, а b имеет своим представителем g-совершенный комплекс на Y. Рассмотрим ограниченный комплекс $F^{\cdot}$ локально-свободных пучков на Y, являющийся резольвентой комплекса $f_*\mathcal{A}^{\cdot}$. Согласно [BFM$_1$, прил., п. 3.2], для каждой ненулевой компоненты F^i существуют неособое многообразие M_i, локально-свободный пучок $F^{i'}$ на M_i и морфизм $\psi_i: Y\to M_i$, такие что $\psi_i^*(F^{i'})=F^i$. Пусть M – декартово произведение многообразий M_i, а $\psi: Y\to M$ – произведение морфизмов ψ_i. В силу леммы 4.5 можно заменить Z произведением $Z\times M$, а g – произведением морфизмов (g,ψ). Поэтому можно считать, что каждая компонента F^i продолжается до локально-свободного пучка на Z. Утверждение леммы следует тогда из результатов § 3.4.

Перейдем к общему случаю. Пусть морфизмы $\psi: X\to M$ и $\psi: Y\to N$ разлагают f и g. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & Y\times M \arrow[r, "k"] \arrow[d, "p"] & Z\times N\times M \arrow[d, "r"] \\
& Y \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "g"'] & Z\times N \arrow[d, "q"] \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

в которой $i=(f,\varphi)$, $j=(g,\psi)$, $k=j\times 1$, а вертикальные отображения являются проекциями. Рассмотрим диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
K_a(f)\otimes K_a(g) \arrow[r, "\alpha\otimes\alpha"] & K_t(f)\otimes K_t(g) \\
K_a(i)\otimes K_a(j) \arrow[u, "\cong"', "\cdot\sigma_p\otimes\cdot\sigma_q"] \arrow[r, "\alpha\otimes\alpha"] \arrow[d, "1\otimes r^*"] & K_t(i)\otimes K_t(j) \arrow[u, "\cong"', "\cdot\Lambda_p\otimes\cdot\Lambda_q"] \arrow[d, "1\otimes r^*"] \\
K_a(i)\otimes K_a(k) \arrow[r, "\alpha\times\alpha"] \arrow[d, "\cdot"] & K_t(i)\otimes K_t(k) \arrow[d, "\cdot"] \\
K_a(ki) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\cong"', "\cdot\sigma_{qr}"] & K_t(ki) \arrow[d, "\cong"', "\cdot\Lambda_{qr}"] \\
K_a(gf) \arrow[r, "\alpha"] & K_t(gf)
\end{tikzcd}
$$

Коммутативность первого и четвертого квадратов следует из леммы 4.5, второго – из леммы 4.4, а третьего – из доказанного выше частного случая настоящей леммы. Композиции вертикальных гомоморфизмов дают произведения в алгебраической и топологической K-теориях, чем доказательство и завершается.

4.0.7. Для завершения доказательства теоремы Римана – Роха нам надо показать, что если $f:X\to Y$ – морфизм локально-полного пересечения, σ_f – каноническая ориентация этого морфизма в $K_a(X\xrightarrow{f}Y)$, заданная структурным пучком $\mathcal{O}_X$, а Λ_f – каноническая ориентация этого морфизма в $K_t(X\xrightarrow{f}Y)$, введенная в § 2.3, то

$$\alpha(\sigma_f)=\Lambda_f .$$

Случай 1: f – замкнутое вложение и существуют алгебраическое векторное расслоение E над некоторой окрестностью U (в топологии Зарисского) подсхемы X в Y с $\operatorname{rank} E=\operatorname{codim}(X,Y)$ и сечение $s:U\to E$, обращающееся в нуль в точности на X (в

смысле теории схем). При построении классов Λ_f, описанном в § 2.3, можно положить $V=U$, $Q=E$. Тогда класс Λ_f представляется обратным образом комплекса Кошуля – Тома $\Lambda^{\cdot}\pi^*E^{\vee}$ при отображении s из $(U, U\setminus X)$ в $(E, E\setminus\{0\})$. Но этот обратный образ совпадает с комплексом Кошуля $\Lambda^{\cdot}E^{\vee}$, заданным расслоением E и сечением s, и является резольвентой пучка $\mathcal{O}_X$ на U. Поэтому комплекс $\Lambda^{\cdot}E^{\vee}$ представляет как Λ_f, так и $\alpha(\mathcal{O}_f)$, что и требовалось доказать.

Случай 2: f – замкнутое вложение. Построим деформацию к нормальному расслоению от заданного вложения при $t=0$ до вложения в нормальное расслоение при $t=\infty$ (ср. [FM_1, § 4]). Точнее, пусть W – раздутие пространства $Y\times\mathbb{P}^1$ вдоль $X\times\{\infty\}$. Тогда получается диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dr, "k_0"] & & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, shift left, "j_0"] \arrow[r, shift right, "j_\infty"'] \arrow[dr, "\bar{f}"'] & X\times\mathbb{P}^1 \arrow[r, "\psi"] & W \arrow[r, "q"] & Y \\
 & W_\infty \arrow[ur, "k_\infty"'] & &
\end{tikzcd}$$

причем $j_0(x)=(x,0)$, $j_\infty(x)=(x,\infty)$, а W_∞ – слой раздутия W над точкой $\infty\in\mathbb{P}^1$. Все отображения в диаграмме суть морфизмы л.п.п.; все они, кроме q, являются замкнутыми вложениями, а q есть композиция стягивания из W в $Y\times\mathbb{P}^1$ и проекции на Y. По построению, выполняются соотношения
$\psi j_0=k_0 f$, $\psi j_\infty=k_\infty\bar{f}$, $qk_0=id$ и $q\bar{k}_\infty\bar{f}=f$.

Поскольку эффективные дивизоры Картье являются нулевыми сечениями линейных расслоений, к ним применим случай 1. Поэтому наше утверждение выполняется для k_0 и k_∞. Случай 1 применим также к морфизму $\bar{f}$, ибо окрестность подсхемы X в W_∞ можно отождествить с нормальным расслоением к X в Y. Далее,

$$\begin{aligned}
\Lambda_f &= \Lambda_f\cdot\alpha(\mathcal{O}_{k_0}\cdot\mathcal{O}_q) && \text{(так как } \mathcal{O}_{k_0}\cdot\mathcal{O}_q=\mathcal{O}_{qk_0}=1\text{)}\\
&= \Lambda_f\cdot\alpha(\mathcal{O}_{k_0})\cdot\alpha(\mathcal{O}_q) && \text{(по лемме 4.0.6)}\\
&= \Lambda_f\cdot\Lambda_{k_0}\cdot\alpha(\mathcal{O}_q) && \text{(согласно случаю 1 для } k_0\text{)}\\
&= \Lambda_{j_0}\cdot\Lambda_\psi\cdot\alpha(\mathcal{O}_q) && \text{(так как } \psi j_0=k_0 f\text{)}
\end{aligned}$$

$= \Lambda_{j_\infty} \cdot \Lambda_\psi \cdot \alpha(\mathcal{O}_q)$ (по лемме 4.0.8 ниже)
$= \Lambda_{\bar f} \cdot \Lambda_{k_\infty} \cdot \alpha(\mathcal{O}_q)$ (так как $\psi j_\infty = k_\infty \bar f$)
$= \alpha(\mathcal{O}_{\bar f}) \cdot \alpha(\mathcal{O}_{k_\infty}) \cdot \alpha(\mathcal{O}_q)$ (согласно случаю 1 для $\bar f$ и k_∞)
$= \alpha(\mathcal{O}_{\bar f} \cdot \mathcal{O}_{k_\infty} \cdot \mathcal{O}_q)$ (по лемме 4.0.6)
$= \alpha(\mathcal{O}_f)$ (так как $q k_\infty \bar f = f$).

Случай 3: общий случай. Выберем $\varphi : X \to M$, разлагающее морфизм f , и пусть $p : Y \times M \to Y$ – проекция. Равенство $\alpha(\mathcal{O}_p) = \Lambda_p$ легко следует из определения. Имеем $\mathcal{O}_f = \mathcal{O}_i \cdot \mathcal{O}_p$, где $i = (f, \varphi)$ – замкнутое вложение, являющееся морфизмом к.п.п., и аналогично $\Lambda_f = \Lambda_i \cdot \Lambda_p$. Нужное заключение вытекает из случая 2 и леммы 4.0.6.

4.0.8. В фигурирующей в предыдущем пункте диаграмме $q\psi = fp$, где $p : X \times \mathbb{P}^1 \to X$ – проекция. Для $v \in \mathbb{P}^1$ обозначим через j_v вложение пространства X в слой над v произведения $X \times \mathbb{P}^1$, т.е. $j_v(x) = (x, v)$. В приведенном в п. 4.0.7 доказательстве была использована следующая лемма.

ЛЕММА. Для любого отображения $f : X \to Y$ и любого c из $K_t(X \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{fp} Y)$ класс $\Lambda_{j_v} \cdot c$ из $K_t(X \to Y)$ не зависит от выбора v из $\mathbb{P}^1$.

Доказательство. Так как композиция $p j_v$ является тождественным отображением, то

$$\Lambda_{j_v} \cdot c = p_* j_{v*}(\Lambda_{j_v} \cdot c) = p_*(j_{v*}(\Lambda_{j_v}) \cdot c)$$

согласно аксиомам A2 и A12 из § 2.2 ч. I. Поэтому достаточно показать, что класс $j_{v*}(\Lambda_{j_v})$ из $K^0_t(X \times \mathbb{P}^1)$ не зависит от v. Это можно проверить, исходя непосредственно из топологических определений или же следующим образом:

$$j_{v*}(\Lambda_{j_v}) = j_{v*}\alpha(\mathcal{O}_{j_v}) \quad \text{(согласно случаю 1 п.4.0.7)}$$

$$= \alpha(j_{v*}(\mathcal{O}_{j_v})) \quad \text{(по лемме 4.0.2).}$$

Но пучок $j_{v*}(\mathcal{O}_X)$ имеет резольвенту вида

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to j_{v*}(\mathcal{O}_X) \to 0.$$

Поэтому элемент $j_{v*}(\mathcal{O}_{j_v}) = [\mathcal{O}] - [\mathcal{O}(-1)]$ из $K^0_a(X \times \mathbb{P}^1)$ не зависит от v , что и требовалось доказать.

4.0.9. Приводимое ниже утверждение является формальным следствием перестановочности α с произведениями.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $g: X \to P$, $p: P \to Y$ - морфизмы, причем p имеет конечную Tor-размерность, и $f = pg$. Пусть, далее, $\mathcal{O}_P$ - каноническая ориентация морфизма p в $K_{alg}(P \xrightarrow{p} Y)$, заданная структурным пучком $\mathcal{O}_P$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
K_{alg}(X \xrightarrow{g} P) & \xrightarrow{\alpha_g} & K_{top}(X \xrightarrow{g} P) \\
\downarrow \cdot \mathcal{O}_P & & \downarrow \cdot \alpha(\mathcal{O}_P) \\
K_{alg}(X \xrightarrow{f} Y) & \xrightarrow{\alpha_f} & K_{top}(X \xrightarrow{f} Y)
\end{array}$$

коммутативна.

4.0.10. ЗАМЕЧАНИЕ. В случае когда морфизм p гладок, f-совершенные комплексы совпадают с g-совершенными. Поэтому умножение на $\mathcal{O}_P$ является изоморфизмом. Согласно п. 4.0.7, $\alpha(\mathcal{O}_P) = \Lambda_p$. Предыдущее следствие показывает, что α_f можно определить, разлагая f в любую композицию замкнутого вложения и гладкого морфизма, не обязательно привлекая именно вложение в $P = Y \times M$, использованное в первоначальной конструкции. В действительности гладкий морфизм p комплексных многообразий представляет собой нормально неособое отображение с комплексным нормальным расслоением, и можно показать, что Λ_p является сильной ориентацией, как она определена в § 4.1 ч. I. Было бы интересно узнать, для каких отображений f конечной Tor-размерности класс $\alpha(\mathcal{O}_f)$ будет сильной ориентацией.

ДОБАВЛЕНИЕ

$\mathcal{L}^2$-КОГОМОЛОГИИ И ГМ-ГОМОЛОГИИ ОСОБЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ[1)]

Дж.Чигер, М.Горески, Р.Мак-Фёрсон

§ 1. Введение

В этой работе, носящей в основном обзорный характер, описаны обобщения на особый случай некоторых специальных когомологических свойств неособых комплексных проективных алгебраических многообразий, которые обычно доказываются с помощью келеровых методов. Один из способов обобщения заключается в подходящей модификации рассматриваемых свойств, при которой они оставались бы справедливыми для обычных когомологий особых многообразий (см. ниже п. 1.5). Здесь мы исходим из той точки зрения, что ослаблять сами свойства не нужно, если надлежащим образом модифицировать рассматриваемую теорию когомологий.

1.1. Пусть M - компактное комплексное алгебраическое многообразие размерности n, вложенное в комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^N$, а Ω - ограничение на M стандартной келеровой формы с $\mathbb{CP}^N$. Имеется ряд замечательных теорем о ког-

---

1) Jeff Cheeger, Mark Goresky, Robert MacPherson, The L^2-cohomology and intersection homology of singular algebraic varieties, preprint, 1981.

мологиях многообразия M с комплексными коэффициентами (совокупность этих теорем мы называем кэлеровым пакетом):

1) чистое (p,q)-разложение Ходжа:

$$H^i(M) \simeq \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q} \quad (c \ \overline{H^{p,q}} = H^{q,p}); \qquad (1.1)$$

2) сильная теорема Лефшеца: отображение

$$H^{n-i}(M) \xrightarrow{\cup[\Omega]} H^{n+i}(M) \qquad (1.2)$$

является изоморфизмом;

3) двойственность Пуанкаре: спаривание

$$H^i(M) \times H^{2n-i}(M) \longrightarrow \mathbb{C},$$

задаваемое значением $\cup$-произведения на фундаментальном классе, невырожденно (или, эквивалентно, невырожденно спаривание

$$H_i(M) \times H_{2n-i}(M) \longrightarrow \mathbb{C},$$

задаваемое количеством точек пересечения трансверсальных циклов с учетом их знаков);

4) теорема Лефшеца о гиперплоских сечениях;

5) теорема Ходжа о сигнатуре.

1.2. Все теоремы из кэлерова пакета, кроме теоремы Лефшеца о гиперплоских сечениях, можно получить, используя аналитические $\mathcal{L}^2$-методы. (Конечно, двойственность Пуанкаре и сильную теорему Лефшеца [D4] можно установить и другим способом.)

Первый шаг заключается в теореме де Рама о представлении топологического инварианта $H^*(M)$ в виде пространства $H^*_{DR}(M)$ когомологий дифференциальных форм, после чего указанные результаты можно рассматривать как формальные следствия а) теоремы Ходжа о том, что каждый класс когомологий содержит ровно одну гармоническую форму, b) того факта, что действие почти-комплексной структуры J на дифференциальных формах переводит гармонические формы в гармонические, и c) того обстоятельства, что гармонические формы – это в точности те формы, которые одновременно замкнуты и козамкнуты.

1.3. Существует несколько глубоких разработок на тему о том, как продолжать различные теоремы из кэлерова пакета на когомологии

особых многообразий. Спектральная последовательность Зимана [Ze, Mc] – развитие двойственности Пуанкаре; понятие глубины де Рама, введенное Огусом [O], относится к теореме Лефшеца о гиперплоских сечениях, а смешанные структуры Ходжа – Делиня [D1-D3] обобщают (p,q)-разложение Ходжа. Все эти теории используют некоторые фильтрации когомологий (грубо говоря, они различают коциклы по тому, как они "завязаны в особенностях"), а их результаты выражают "степень отклонения" от соответствующих теорем для неособого случая в терминах этих фильтраций. Картина, представленная в настоящей работе, никоим образом не противопоставлена этим теориям, а, напротив, тесно с ними связана (см. § 7).

<u>1.4.</u> Пусть X – проективное алгебраическое многообразие размерности n над полем комплексных чисел. Инвариантами многообразия X, которые находятся в центре внимания этой статьи, являются группы <u>ГМ-гомологий</u>[1] $IH_*(X)$. Грубо говоря, группы $IH_*(X)$ – это группы гомологий некоторого подкомплекса комплекса цепей многообразия X с определенными геометрическими условиями на прохождение через особенности многообразия X. (Мы напомним их кратко в § 2; подробнее см. в [GM1 – GM3].) Для циклов этого специального вида пересечения определяют спаривание, которое приводит к идеальному спариванию (1.3). Группы $IH_*(X)$ представляют собой топологический, но не гомотопический инвариант. Имеются естественные отображения

$$\begin{tikzcd} & IH_i(X) \arrow[dr] & \\ H^{2n-i}(X) \arrow[ur] \arrow[rr, "\frown[X]"'] & & H_i(X) \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

Когда многообразие X неособо, все они являются изоморфизмами. Однако в некоторых случаях группа $IH_*(X)$ гораздо больше, чем соответствующая группа обычных гомологий или когомологий.

Для групп $IH_*(X)$ справедлив один интересный локальный результат. Возьмем произвольную точку $x \in X$. Пусть B – пересечение X с небольшим открытым шаром радиуса ε с центром в x, а S – пересечение X со сферой радиуса $\varepsilon/2$ с центром в x.

---

[1] В оригинале используется термин „intersection homology" (откуда обозначение IH ниже). Под этим именем впервые ввели такие гомологии Горески и Мак-Фёрсон. Примененный в переводе термин образован по первым буквам фамилий этих авторов. – <u>Прим. перев.</u>

Тогда (для цепей с компактным носителем)

$$IH_i(B) = \begin{cases} IH_i(S) & \text{при } i < n, \\ 0 & \text{при } i \geq n. \end{cases} \quad (1.6)$$

В действительности подходящая версия этого локального результата характеризует группы $IH_*(X)$ (см. п.2.2).

1.5. Основная идея этой статьи заключена в следующей программе: теоремы кэлерова пакета можно без всяких модификаций перенести на особый случай, если вместо обычных гомологий использовать ГМ-гомологии.

Мы приведем несколько гипотез, связанных с этой программой, и и укажем возможные $\mathcal{L}^2$-методы их доказательства. Кроме того, мы укажем ряд примеров и следствий.

Современное состояние данной программы описано в § 6. Вкратце оно таково: все части кэлерова пакета, кроме тех, которые непосредственно связаны с (p,q)-разложением Ходжа, в общем доказаны (но по большей части методами, отличными от $\mathcal{L}^2$-методов). Что касается (p,q)-разложения, то оно известно для многих классов примеров.

1.6. Исходной точкой для данной программы послужило существование $\mathcal{L}^2$-методов на некоторых особых многообразиях, которые, как оказалось, подходят для изучения теории ГМ-гомологий [C1 - C3].

Пусть $X \subset \mathbb{CP}^N$ - многообразие с особенностями, а $\sum$ - множество его особых точек. Тогда можно рассмотреть гладкое неполное риманово многообразие $X \setminus \sum$ с метрикой Ω, индуцированной указанным вложением. Группа i-х $\mathcal{L}^2$-когомологий $H^i_{(2)}(X)$ определяется как факторпространство пространства гладких i-форм θ на $X \setminus \sum$, принадлежащих $\mathcal{L}^2$, по подпространству форм $d\psi$, где ψ - гладкая $(i-1)$-форма, принадлежащая $\mathcal{L}^2$ вместе с $d\psi$ (см. § 3).

Если X имеет конические особенности (определение см. в § 3), то справедливы два следующих довольно удивительных результата [C3, п.6.3]:

1) $H^i_{(2)}(X)$ изоморфно пространству замкнутых и козамкнутых гармонических форм;

2) для этого случая имеет место локальный результат, двойственный (1.6), и, следовательно, $H^*_{(2)}(X)$ есть когомологическая теория, двойственная к $IH_*(X)$.

Эти результаты аналогичны теоремам Ходжа и де Рама, а потому они дают надежду на $\mathcal{L}^2$-доказательства теорем кэлерова пакета для ГМ-гомологий.

1.7. Хотя возможное существование подходящей $\mathcal{L}^2$-теории на неполных кэлеровых многообразиях $X\setminus\Sigma$ и послужило основным источником мотивировок для предыдущих гипотез, тем не менее это отнюдь не единственный возможный подход к проблеме. В действительности большинство относящихся сюда результатов получено пока другими методами. Более того, как понял первый из авторов после своей публикации [C3], содержащееся там утверждение, что данные гипотезы являются формальными следствиями теории Ходжа, не является верным в случае неполных метрик. Дело в том, что на неполном многообразии гармонические $\mathcal{L}^2$-формы не обязаны быть всегда замкнутыми и козамкнутыми. Таким образом, хотя а) и б) из п.1.2 выполнены автоматически, про с) этого сказать нельзя. В частности, утверждение из [C3] о том, что доказанная там теорема Ходжа влечет за собой кэлеров пакет для алгебраических многообразий, на которых индуцированная метрика имеет конические особенности, пока еще не обосновано, за исключением некоторых частных случаев, в которых непосредственно проверяется, что J сохраняет пространства $\mathcal{H}^i$ замкнутых и козамкнутых гармонических $\mathcal{L}^2$-форм (см. п.6.4 и [C4]). Доказательство этого утверждения (по-видимому, чрезвычайно деликатное) должно использовать предположение, что особенности метрики являются коническими в комплексно-аналитическом (а не только в кусочно-гладком) смысле. В противном случае наши топологические заключения заведомо неверны.

1.8. Упомянутые выше трудности пропадают в случае полных метрик на $X\setminus\Sigma$, так как на полном гладком многообразии гармонические $\mathcal{L}^2$-формы автоматически замкнуты и козамкнуты (см. [DR], [AV] и § 3). Итак, другой возможный подход к нашим проблемам может состоять в попытке построить полную метрику на $X\setminus\Sigma$ (или на $X\setminus\Sigma'$ для подходящего множества $\Sigma'\supset\Sigma$), для которой пространство $\mathcal{H}^i$ двойственно к IH_i. За те преимущества, которые дает полнота, приходится, правда, платить определенную плату: в общем случае вычисление пространств H^i становится более трудным. В каждой из этих программ с самого начала возникают необозримые трудности, потому что даже в очень простых случаях риманова геометрия особых алгебраических многообразий и их пополнений пока еще мало изучена и, честно говоря, мало понята.

1.9. Всё же, хотя в настоящее время результаты о кэлеровом пакете, которые можно получить $\mathcal{L}^2$-методами, гораздо скромнее, чем результаты, которые можно получить другими методами, мы тем не менее здесь по ряду причин делаем упор на $\mathcal{L}^2$-теорию. Во-первых, она послужила исходным пунктом всех наших гипотез и в конечном счете должна послужить базой для основ полного понимания существа дела. Во-вторых, как и в неособом случае, эти методы основываются на существовании кэлеровой метрики, а не на более специальных свойствах алгебраических многообразий. Поэтому в случае успеха они работают в более общей ситуации. В-третьих, кэлеровы метрики (полные и неполные) на неособом куске алгебраического многообразия являются богатым источником новых, еще не изученных задач геометрии и анализа.

1.10. Исторические замечания. Идеи этой статьи имеют три независимых источника:

1) группы ГМ-гомологий, определенные Горески и Мак-Фёрсоном в кусочно-линейной топологии для изучения теории пересечения циклов на особом многообразии;

2) исследование $\mathcal{L}^2$-когомологий неособой части многообразия с коническими особенностями, предпринятое Чигером в связи с некоторыми моментами, возникшими при изучении аналитического кручения;

3) процедуру распространения на всё многообразие M некоего варианта структуры Ходжа на $M\setminus D$ (где M – неособое алгебраическое многообразие в любой характеристике, а D – его дивизор с нормальными пересечениями), открытую Делинем и используемую при изучении смешанных структур Ходжа.

Все эти процедуры приводят к одному и тому же на первый взгляд странному локальному результату типа (1.6). Это совпадение было замечено в 1976 г. Сулливаном (для 1) и 2)) и Делинем (для 1) и 3)). Позже Делинь предложил пучковую конструкцию ГМ-гомологий.

После этого было естественно предположить, что все эти три подхода дают одну и ту же группу, т.е. что речь идет об одном-единственном инварианте, допускающем определения топологическими, аналитическими и алгебраическими средствами. Это предположение в ходе бесед между Мак-Фёрсоном и Чигером в 1977 г. привело их к гипотезе о справедливости теорем кэлерова пакета для такого инварианта. Сейчас данное предположение доказано (см. (6.4)

и [C3] для 1) и 2); [GM3] для 1) и 3)), а также проверена значительная часть кэлерова пакета.

Нам хотелось бы выразить свою признательность за гостеприимство Институту высших научных исследований, во время пребывания в котором была написана эта работа. Мы благодарны Д. Бёрнзу, П. Делиню, О. Габберу, У. Фултону и Д. Салливану за полезные обсуждения.

§ 2. Теория ГМ-гомологий

2.1. В этом параграфе напоминаются определение и основные свойства групп ГМ-гомологий $IH(X)$ ([GM1,2]). Поскольку на алгебраическом многообразии нет канонической кусочно-линейной структуры, то при определении групп $IH_k(X)$ технически удобнее пользоваться субаналитическими цепями. Заметим, однако, что вполне можно также выбрать какую-нибудь кусочно-линейную структуру на X и определить группы $IH_k(X)$, используя кусочно-линейные цепи; результат не будет зависеть от выбора кусочно-линейной структуры. Эта точка зрения принимается в конце § 3. Читатель, незнакомый с субаналитической категорией, может и в этом параграфе считать цепи кусочно-линейными.

Пусть X – комплексно-аналитическое многообразие размерности n, содержащееся в некотором неособом многообразии. Выберем какую-либо аналитическую стратификацию Уитни ([MA, T]). Она состоит из фильтрации (замкнутых) аналитических подмногообразий

$$X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n = X,$$

такой что:

(а) $X_i \setminus X_{i-1}$ – неособое (возможно, пустое) комплексно-аналитическое i-мерное многообразие (все компоненты которого называются стратами комплексной размерности i);

(б) для любой пары стратов R и S выполнено условие Уитни B, т.е. если $x_i \in S$ – последовательность точек, сходящаяся к некоторой точке $x \in R$, и $y_i \in R$ – последовательность точек, также сходящаяся к x, а кроме того, секущие $\overline{x_i, y_i}$ (в координатной системе объемлющего неособого многообразия) сходятся к некоторой прямой l и касательные плоскости $T_{x_i}S$ сходятся к некоторой предельной плоскости τ, то $l \subset \tau$.

Группы $IH_k(X)$ строятся при помощи этой стратификации, но результат не зависит от ее выбора.

Обозначим через $C_*(X)$ комплекс компактных (вещественных) субаналитических цепей на X с комплексными коэффициентами. Как доказал Хардт [H], гомологии этого комплекса совпадают с группами сингулярных гомологий $H_*(X,\mathbb{C})$. Для любой цепи $\xi\in C_i(X)$ через $|\xi|$ обозначается ее носитель; он представляет собой (вещественное) i-мерное субаналитическое подмножество в X.

Определим подкомплекс $IC_*(X)$ допустимых цепей условием: $\xi\in IC_i(X)$, если

$$\dim|\xi|\cap X_k\leqslant i-n+k-1,$$

$$\dim|\partial\xi|\cap X_k\leqslant i-n+k-2.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Группа $IH_i(X)$ есть группа i-х гомологий комплекса $IC_*(X)$.

Имеется произведение $IH_i(X)\times IH_j(X)\to IH_{i+j-2n}(X)$, называемое произведением пересечения (или просто пересечением), которое определяется следующим способом, восходящим к Лефшецу [L]. Пусть $\xi\in IC_i(X)$ и $\eta IC_i(X)$ – трансверсально пересекающиеся цепи. Тогда пересечение $|\xi|\cap|\eta|$ обладает структурой $(i+j-2n)$-мерной субаналитической цепи, такой что

$$\partial(\xi\cap\eta)=(\partial\xi)\cap\eta+(-1)^i\xi\cap\partial\eta.$$

Для любой цепи ξ почти все цепи η трансверсальны к ξ. Следовательно, трансверсальные пересечения индуцируют спаривание групп ГМ-гомологий.

ТЕОРЕМА (двойственность Пуанкаре). Если многообразие X компактно, то спаривание пересечения невырожденно для дополнительных размерностей, т.е. композиция

$$IH_i(X)\times IH_{2n-i}(X)\to H_0(X)\to\mathbb{C}$$

индуцирует изоморфизм

$$IH_i(X)\cong\underline{\mathrm{Hom}}(IH_{2n-i}(X),\mathbb{C}).$$

Связь с когомологиями. Группы ГМ-гомологий лежат "между" когомологиями и гомологиями в том смысле, что для компактных

многообразий X справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Имеют место канонические гомоморфизмы

$$H^i(X) \to IH_{2n-i}(X) \to H_{2n-i}(X),$$

разлагающие отображение двойственности Пуанкаре $\cap[X] : H^i(X) \to H_{2n-i}(X)$. В случае когда X неособо, оба они являются изоморфизмами. Произведение пересечения продолжается до структуры модуля

$$H^i(X) \times IH_j(X) \to IH_{j-i}(X),$$

которая согласована с $\cup$- и $\cap$-произведениями.

Для компактного многообразия X, вложенного в некоторое неособое многообразие размерности N, эти отображения строятся так: выберем субаналитическую окрестность с границей $(U, \partial U)$ многообразия X в объемлющем многообразии так, чтобы X было деформационным ретрактом U, а граница ∂U была топологическим многообразием. По двойственности Лефшеца $H^i(X) \cong H_{2N-i}(U, \partial U)$. Поэтому любой класс когомологий можно представить (относительной) субаналитической цепью ξ на $(U, \partial U)$, которую можно считать трансверсальной к X. Пересечение $\xi \cap X$ удовлетворяет тогда условию допустимости. Значит, оно определяет цепь в $IC_{2n-i}(X)$, что и дает нам отображение $H^i(X) \to IH_{2n-i}(X)$.

Аналогично если $\eta \in IC_j(X)$, то ξ можно выбрать трансверсальным к η. Поэтому $\xi \cap \eta \in IC_{j-i}(X)$, что индуцирует искомую структуру модуля.

Наконец, отображение $IH_i(X) \to H_i(X)$ индуцируется включением комплексов цепей $IC_*(X) \subset C_*(X)$

Функториальность. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f: Y \to X$ – отображение включения подмногообразия Y в многообразие X. Такое отображение f называется нормально неособым включением (относительной комплексной размерности c), если оно собственно и в объемлющем проективном пространстве существует неособое аналитическое подмногообразие M (коразмерности c), такое что M трансверсально ко всем стратам многообразия X и $Y = M \cap X$. Стратификацию на этом подмногообразии можно индуцировать с X.

Такое отображение f определяет гомоморфизм прямого образа

$$f_*: IH_i(Y) \to IH_i(X),$$

поскольку цепь $f(\xi)$ допустима в $IC_i(X)$, если цепь ξ допустима в $IC_i(Y)$. Дуализация приводит к гомоморфизму обратного образа

$$f^*: IH_k(X) \cong Hom(IH_{2n-k}(X), \mathbb{C}) \to Hom(IH_{2n-k}(Y), \mathbb{C}) \cong IH_{k-2c}(Y).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f: Y \to X$ – гладкое собственное отображение. Оно задает топологическое расслоение, слоями которого являются комплексные многообразия. Предположим, что все они имеют размерность d. Такое отображение называется нормально неособой проекцией относительной размерности $-d$. Стратификация, выбранная на X, поднимается[1] до стратификации многообразия Y.

Такая проекция f индуцирует гомоморфизм обратного образа:

$$f^*: IH_i(X) \to IH_{i+2d}(Y),$$

поскольку цепь $f^{-1}(\xi)$ допустима на Y, если $\xi \in IC_i(X)$. По двойственности получаем гомоморфизм прямого образа

$$f_*: IH_k(Y) \to IH_k(X).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отображение f, разлагающееся в композицию нормально неособого включения и последующей нормально неособой проекции, мы называем нормально неособым. Относительная размерность такого отображения f определяется как сумма относительных размерностей его сомножителей.

При нормально неособых отображениях группы гомологий, когомологий и ГМ-гомологий можно отображать в обе стороны (см. ч.I основного текста и [GO]).

Разветвленные накрытия. Пусть $f: Y \to X$ – конечное разветвленное накрытие. Тогда f индуцирует гомоморфизмы

$$f_*: IH_i(Y) \to IH_i(X) \qquad \text{и} \qquad f^*: IH_i(X) \to IH_i(Y).$$

Для этого выберем на многообразиях X и Y стратификации, совместимые с f, и заметим, что для любой допустимой цепи ξ на Y ее образ $f(\xi)$ допустим на X. Аналогично, для любой цепи η, допустимой на X, прообраз $f^{-1}(\eta)$ допустим на Y.

---

[1] Точнее, расширяется после подъема добавлением стратов малой размерности ($< d$). – Прим. перев.

2.2. Локальный результат. Сейчас мы дадим наглядное толкование локального результата (1.6). В рассматриваемой ситуации при $i \geqslant n$ любой цикл $\xi \in IC_i(B)$ является границей легко конструируемой допустимой цепи $c(\xi)$ (конуса над ξ). Таким образом, $IH_i(B)=0$ при $i \geqslant n$.

При $i<n$ можно считать, что никакая допустимая цепь $\xi \in IC_i(B)$ не проходит через центр нашего шара, даже когда он не является точкой 0-страта. Поэтому она деформируется (перемещением вдоль образующих конуса, представляющего B) в цепь на S – основании конуса B. Это соответствует оператору гомотопии (3.20). Далее, любая допустимая цепь $\eta \in IC_i(S)$ допустима и на B, откуда $IH_i(B) \cong IH_i(S)$ при $i<n$. Это равноценно соответствующему результату в случае $\mathcal{L}^2$-когомологий (3.19), поскольку $H_i(S) \cong IH_i(S)$ для неособых S.

Используя этот локальный результат и точную последовательность Майера – Вьеториса, получаем такое

СЛЕДСТВИЕ. Предположим, что многообразие X имеет единственную изолированную особую точку x. Тогда

$$IH_i(X)=\begin{cases} H_i(X) & \text{при } i>n, \\ im\,(H_i(X\setminus x) \to H_i(X)) & \text{при } i=n, \\ H_i(X\setminus x) & \text{при } i<n. \end{cases}$$

2.3. Аксиоматическое описание. Комплексом пучков на X называется совокупность пучков $\{\mathcal{S}^p\}$ векторных $\mathbb{C}$-пространств вместе с отображениями этих пучков

$$\mathcal{S}^p \xrightarrow{d} \mathcal{S}^{p+1} \xrightarrow{d} \mathcal{S}^{p+2},$$

такими что $d\circ d=0$. Если каждый из пучков $\mathcal{S}^p$ тонок, то через $H^p(X,\mathcal{S}^\cdot)$ мы обозначаем p-ю группу когомологий комплекса

$$\Gamma(X,\mathcal{S}^0) \to \Gamma(X,\mathcal{S}^1) \to \Gamma(X,\mathcal{S}^2) \to \dots,$$

а через $\mathcal{H}^p\mathcal{S}^\cdot$ – пучок локальных когомологий ($\ker d^p/ im\, d^{p-1}$).

Используя тот же подход, что и в [GM3], можно получить следующую характеризацию ПМ-гомологий.

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathcal{S}^\cdot$ – комплекс тонких пучков на X, такой что

1) $\mathcal{S}^k = 0$ для всех $k < 0$;

2) пучки локальных когомологий $\mathcal{H}^p \mathcal{S}^\cdot$ локально-постоянны на каждом страте $X_i \setminus X_{i-1}$;

3) существует отображение пучков $\mathbb{C}_{X \setminus X_{n-1}} \to \mathcal{S}^\cdot|(X \setminus X_{n-1})$, индуцирующее изоморфизм соответствующих пучков локальных когомологий, где $\mathbb{C}_{X \setminus X_{n-1}}$ обозначает постоянный пучок на $X \setminus X_{n-1}$ со слоем $\mathbb{C}$;

4) для каждой точки $x \in X_i \setminus X_{i-1}$ существует такая ее окрестность $U \subset X \setminus X_{i-1}$, что

$$H^k(U; \mathcal{S}^\cdot|U) \begin{cases} = 0 & \text{при } k \geq n-i, \\ \cong H^k(U \setminus X_i; \mathcal{S}^\cdot|(U \setminus X_i)) & \text{при } k \leq n-i-1, \end{cases}$$

причем этот изоморфизм индуцирован взятием ограничения.

Тогда $H^k(X, \mathcal{S}^\cdot) \cong IH_{2n-k}(X)$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Условие 4) представляет собой функториальную версию локального результата о ГМ-гомологиях (см. 1.6) и п. 2.2).

2. Предыдущая теорема верна также для псевдомногообразий X со стратами четной размерности (см. п. 3.4).

§ 3. $\mathcal{L}^2$-когомологии

В этом параграфе напоминаются основные определения и факты об $\mathcal{L}^2$-когомологиях, а также указывается их связь с ГМ-гомологиями в коническом случае (подробности см. в [С 3]).

3.1. Пусть Y – произвольное (не обязательно полное) риманово многообразие с метрикой g. Предполагается, что $\partial Y = \emptyset$. Обозначим через Λ^i и Λ^i_0 соответственно пространства внешних i-форм класса C^∞ и внешних i-форм класса C^∞ с компактным носителем, а через $\mathcal{L}^2$– пространство внешних i-форм с измеримыми коэффициентами и интегрируемым квадратом. Пусть $d_i : \Lambda^i \to \Lambda^{i+1}$ – внешнее дифференцирование. Оно задает неограниченный оператор (в смысле теории гильбертовых пространств), также обозначаемый через d_i, с областью определения

$$\operatorname{dom} d_i = \{\alpha \in \Lambda^i \cap \mathcal{L}^2 \mid d\alpha \in \Lambda^{i+1} \cap \mathcal{L}^2\}. \qquad (3.1)$$

Как обычно, положим

$$\ker d_i = \{\alpha \in \Lambda^i \mid d\alpha = 0\}, \tag{3.2}$$

$$\text{range } d_i = \{\eta \in \Lambda^{i+1} \mid d_i \alpha = \eta \text{ для некоторого } \alpha \in \operatorname{dom} d_i\}. \tag{3.3}$$

Самое простое определение $\mathcal{L}^2$-когомологий таково:

$$H^i_{(2)}(Y) = \ker d_i / \text{range } d_{i-1}. \tag{3.4}$$

Отметим сразу, что пространство $H^i_{(2)}(Y)$ зависит только от класса квазиизометрии метрики g (метрика g' называется <u>квазиизометричной</u> метрике g, если $\frac{1}{k} g \le g' \le kg$ для некоторого вещественного числа $k > 0$).

Пусть $d_{i,0} = d_i \mid \Lambda^i_0$, $\delta_{i,0} = \delta_i \mid \Lambda^i_0$, где δ_i – стандартный дифференциальный оператор $(-1)^{n(i+1)+1} * d *$ с областью определения $\operatorname{dom} \delta_i$, заданной, как в (3.1). Будем обозначать через A^* оператор, сопряженный к A. Так как область $\operatorname{dom} \delta_{i+1,0} = \Lambda^{i+1}_0$ плотна в пространстве всех внешних форм, а по теореме Стокса

$$\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta\beta \rangle \tag{3.5}$$

для всех $\alpha \in \operatorname{dom} d_i$, $\beta \in \operatorname{dom} \delta_{i+1,0}$, то оператор d_i допускает <u>слабое</u> замыкание $\delta^*_{i+1,0}$. Кроме того, d_i обладает <u>сильным</u> замыканием $\bar{d}_i$. Соотношение $\bar{d}_i \alpha = \eta$ означает, что $\alpha \in \mathcal{L}^2$ и существуют такие формы $\alpha_j \in \operatorname{dom} d_i$, что $\alpha_j \to \alpha$ и $d\alpha_j \to \eta$. Операторы $\bar{d}_i$ и $\delta^*_{i+1,0}$, очевидно, замкнуты (т.е. замкнуты их графики), и $\operatorname{dom} \bar{d}_i \subseteq \operatorname{dom} \delta^*_{i+1,0}$, $\delta^*_{i+1,0} \mid \operatorname{dom} \bar{d}_i = \bar{d}_i$. В действительности имеет место даже равенство $\bar{d}_i = \delta^*_{i+1,0}$ (см. [C3, GA1]). Таким образом, в качестве другого возможного кандидата на роль $\mathcal{L}^2$-когомологий можно взять

$$H^i_{(2),\#}(Y) = \ker \bar{d}_i / \text{range } \bar{d}_i. \tag{3.6}$$

Впрочем, как установлено в [C3], естественное отображение $H^i_{(2)}(Y) \to H^i_{(2),\#}(Y)$ всегда является изоморфизмом. Поэтому мы можем использовать то из этих определений, которое удобнее. На пространствах $H^i_{(2)}(Y), H^i_{(2)\#}(Y)$ определена

естественная полунорма

$$\| U \| = \inf_{\alpha\in U} \|\alpha\| . \qquad (3.7)$$

Она сохраняется при упомянутом выше изоморфизме. Отсюда немедленно вытекает, что она является нормой тогда и только тогда, когда подпространство $\operatorname{range} \bar d_i$ замкнуто (т.е. $\bar d_i \gamma_j \to \eta \Rightarrow \eta = \bar d_i \psi$ для некоторой формы ψ). Поскольку оператор $\bar d_i$ замкнут, то по стандартному следствию теоремы об открытом отображении подпространство $\operatorname{range} d_{i-1}$ заведомо замкнуто, если пространство $H^i_{(2)}(Y) = H^i_{(2),\#}(Y)$ конечномерно.

ПРИМЕР. Пусть $Y = \mathbb{R}$ – обычная вещественная прямая. Если f – такая C^∞-функция, что $f(x) = 1/x$ при $|x| \geqslant 1$, то $f\,dx \in \ker \bar d_1$. Очевидно, что общий вид функции α с $d\alpha = f(x)dx$ при $x > 1$ таков: $\alpha = \log x + c$. Но тогда $\alpha \notin \mathcal{L}^2$, а значит, $f\,dx \notin \operatorname{range} d_0$. Так как $\bar H^1_{(2)} = H^1_{(2),\#}$, то также $f\,dx \notin \operatorname{range} \bar d_0$. Пусть φ – гладкая функция с носителем в интервале $[-2,2]$, такая что $\varphi | [-1,1] \equiv 1$. Легко проверить, что $d(\varphi_n \alpha) \longrightarrow f\,dx$ в $\mathcal{L}^2$. Следовательно, пространство $\operatorname{range} d_0$ не замкнуто и $H^1_{(2)}(\mathbb{R})$ бесконечномерно.

Ниже через $\bar V$ обозначается замыкание подпространства V.

Определим $\mathcal{H}^i$ как пространство i-форм $h \in \mathcal{L}^2$ с $dh = \delta h = 0$. Еще Кодаира заметил, что всегда справедлива *слабая теорема Ходжа*:

$$\mathcal{L}^2 = \overline{\operatorname{range} \delta_{i+1,0}} \oplus \overline{\operatorname{range} d_{i-1,0}} \oplus \mathcal{H}^i, \qquad (3.8)$$

причем слагаемые здесь ортогональны и разложение согласовано с пересечениями $\Lambda^i \cap \mathcal{L}^2$. Это – следствие *локальной* эллиптической регулярности оператора Лапласа $\Delta = d\delta + \delta d$.

Заметим, что имеется естественное отображение $i_{\mathcal{H}} : \mathcal{H}^i \to H^i_{(2)}(Y)$. Будем говорить, что для многообразия Y выполнена *сильная теорема Ходжа*, если отображение $i_{\mathcal{H}}$ является изоморфизмом, или, эквивалентно, если $\operatorname{range} \bar d_{i-1} = \overline{\operatorname{range} d_{i-1,0}}$. Это свойство, очевидно, зависит только от класса квазиизометрии выбранной метрики. *Сюръективность* $i_{\mathcal{H}}$ эквивалентна включению $\operatorname{range} \bar d_{i-1} \supseteq \overline{\operatorname{range} d_{i-1,0}}$, которое имеет место, например, когда замкнуто пространство $\operatorname{range} \bar d_{i-1,0}$.

Инъективность $i_{\mathcal{H}}$ имеет место, если $\bar d = \delta^*$, или, эквивалентно (так как $A^{**} = A$ для замкнутых операторов), если $\bar d^* = \bar \delta$.

В этом случае, как обычно,

$$\langle h, \bar{d}\beta \rangle = \langle \bar{\delta} h, \beta \rangle = 0. \tag{3.9}$$

Выше мы уже отмечали, что всегда $\delta^*_{i+1,0} = \bar{\delta}^*_{i+1,0} = \bar{d}_i$. Таким образом,

$$\bar{d}_i = \bar{\delta}^*_{i+1} \Leftrightarrow \bar{d}^* = \bar{\delta}_{i+1} \Longleftrightarrow \bar{d}_i = \bar{d}_{i+1,0} \Longleftrightarrow \bar{\delta}_{i+1} = \bar{\delta}_{i+1,0}. \tag{3.10}$$

3.2. Если Y – полное многообразие, то, как показано в [GA2], равенства, равносильность которых утверждается в (3.10), выполнены. Мы вкратце изложим это рассуждение, предполагая существование точки $y \in Y$, для которой функция ρ_y расстояния от y гладкая; в общем случае можно воспользоваться регуляризацией и получить гладкую аппроксимацию функции ρ_y. Возьмем функцию φ_n из примера предыдущего пункта и положим $f_n = \varphi_n \circ \rho_y$. Тогда, как легко проверить, если $\alpha \in \operatorname{dom} \bar{d}_i$, то $(f_n \alpha) \xrightarrow{n} \alpha$ и $d_{i,0}(f_n \alpha) \to d_i \alpha$, откуда и следует совпадение $\bar{d}_{i,0} = \bar{d}_i$.

В некоторых "неполных случаях", представляющих интерес для дальнейшего, совпадение $\bar{d} = \bar{\delta}^*_{i+1}$ можно доказать и не прибегая к функциям обрезания. Однако в "полном случае", используя функции f_n, удается установить сильное дополнительное свойство: если $h \in \mathcal{L}^2$ и $\Delta h = 0$, то $h \in \mathcal{H}^i$ (т.е. $dh = \delta h = 0$) (см. [DR, AV]). В неполном случае с этим свойством дело обстоит весьма деликатно. Оно не инвариантно при переходе к квазиизометричной метрике и может не выполняться, даже если $\bar{d} = \bar{\delta}^*$; например, оно не выполняется для двойного накрытия плоскости с проколотой точкой и поднятой на нее плоской метрики. Именно этот эффект отвечает за все трудности в неполном случае, описанные во введении.

Если $h \in \mathcal{L}^2$ и $\Delta h = 0$, то в полном случае по теореме Стокса

$$\langle d\delta h, f_n^2 h \rangle - \langle f_n dh, 2df_n \wedge h \rangle = \langle f_n dh, f_n \delta h \rangle, \tag{3.11}$$

$$\langle \delta dh, f_n^2 h \rangle \pm \langle f_n \delta h, 2*(df_n \wedge *h) - \langle f_n dh, f_n dh \rangle. \tag{3.12}$$

Так как $|\langle a, b \rangle| \leq \frac{1}{2}\langle a, a \rangle + \frac{1}{2}\langle b, b \rangle$, то

$$\tfrac{1}{2}\langle f_n dh, f_n dh \rangle + 2\langle f_n \wedge h, df_n \wedge h \rangle \geq |\langle f_n dh, 2df_n \wedge h \rangle|, \tag{3.13}$$

$$\tfrac{1}{2}\langle f_n \delta h, f_n \delta h \rangle + 2\langle df_n \wedge *h, df_n \wedge *h \rangle \geq |\langle f_n \delta h, 2*(df_n \wedge *h) \rangle|. \tag{3.14}$$

Складывая (3.11) с (3.12) и используя затем (3.13), (3.14) и то, что $\Delta h = 0$, получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\left(\langle f_n dh, f_n dh\rangle + \langle f_n \delta h, f_n \delta h\rangle\right)$$
$$\leq 2\left(\langle df_n \wedge h, df_n \wedge h\rangle + \langle df_n \wedge *h, df_n \wedge *h\rangle\right). \qquad (3.15)$$

Легко убедиться, что его правая часть стремится к нулю при $n \to \infty$. Но $f_n \to 1$. Значит, $dh = \delta h = 0$.

Чтобы учесть возможную незамкнутость пространства range d_{i-1}, удобно ввести приведенные $\mathcal{L}^2$-когомологии по формуле

$$\overline{H}_{(2)}(Y) = \ker \overline{d}_i / \overline{\operatorname{range} d_{i-1}} . \qquad (3.16)$$

Если $\overline{d} = \overline{\delta}*$, то $\overline{H}^i_{(2)}(Y) \cong \mathcal{H}^i$ автоматически. Предположим теперь, что мы поставили себе цель найти некоторую топологическую интерпретацию построенного пространства $\mathcal{H}^i$, а затем вывести свойства объекта, полученного при интерпретации, из общих свойств гармонических форм; например, если Y – произвольное полное кэлерово многообразие, то для $\mathcal{H}^*$ (которое может быть и бесконечномерным при некоторых i) выполнен весь кэлеров пакет. Тогда $\overline{H}_2(Y)$ можно рассматривать как некое связующее звено, т.е. для интерпретации $\mathcal{H}^i$ достаточно вычислить $\overline{H}^i_{(2)}(Y)$. В том случае, когда $\overline{H}^i_{(2)}(Y) = H^i_{(2)}(Y)$, вычисления можно производить на открытых подмножествах и использовать обычные точные последовательности когомологий [CS]. Но поскольку $\overline{H}^*_{(2)}(Y)$ не представляет собой когомологий некоторого комплекса коцепей, то точность таких последовательностей может нарушаться при $\overline{H}^i_{(2)}(Y) \neq H^i_{(2)}(Y)$ (ср. с [APS]).

3.3. Теперь мы опишем $\mathcal{L}^2$-когомологии простейшей особенности в компактном случае, а именно метрического конуса. Пусть N^m – риманово многообразие с метрикой $\tilde{g}$. Метрический конус $C^*(N^m)$ определяется как пополнение гладкого неполного риманова многообразия $C(N) = \mathbb{R}^+ \times N$ с метрикой

$$g = dr \otimes dr + r^2 \tilde{g} . \qquad (3.17)$$

Через $C_{r_0,r}(N^m)$ мы обозначаем подмножество $(r_0, r) \times N \subset C(N^m)$.

Пусть, далее, X^{m+1} – компактное метрическое пространство, на котором имеется конечное множество точек $\{p_j\}$, такое

что $X \setminus \bigcup_{j=1} p_j$ – гладкое риманово многообразие. Будем говорить, что многообразие X^{m+1} имеет метрико-конические особенности, если при каждом j найдутся гладкое компактное риманово многообразие N_j^m и окрестность U_j точки p_j, такие что $U_j \setminus p_j$ изометрично $C_{0,r_j}(N^m)$. Многообразие X называется многообразием с изолированными коническими особенностями, если его метрика на $X \setminus \bigcup p_j$ квазиизометрична метрике описанного выше вида. Теперь мы можем определить $H^*_{(2)}(X)$, положив

$$H^i_{(2)}(X) = H^i_{(2)}(X \setminus \bigcup_{j=1}^{N} p_j). \qquad (3.18)$$

В [C3] установлено, что пространство $H^i_{(2)}(X)$ не меняется при дальнейшем удалении точек из $X \setminus \bigcup_{j=1} p_j$. Поэтому $H^i_{(2)}(X)$ определено корректно.

Лемма Пуанкаре в этой ситуации принимает следующий вид:

$$H^i_{(2)}(C_{0,1}(N^m)) = \begin{cases} H^i(N^m) & \text{при } i \leq m/2, \\ 0 & \text{при } i > m/2. \end{cases} \qquad (3.19)$$

Это напоминает локальный результат из п. 2.2 для IH-гомологий усеченного конуса. Комбинируя (3.19) со стандартными точными последовательностями, мы можем, как и в п. 2.2, найти размерности пространств $H^i_{(2)}(X^{m+1})$, при условии что $m+1$ чётно. В частности, тогда $H^i_{(2)}(X^{m+1})$ конечномерно, откуда вытекает замкнутость подпространства range $\bar{d}_{i-1}$.

Если $m+1 = 2k$ или если $m+1 = 2k+1$, а $H^k(N^{2k}, \mathbb{R}) = 0$, то $\bar{d} = \bar{\delta}^*$. Поэтому в таких случаях выполнена сильная теорема Ходжа. Если же $m+1 = 2k+1$ и $\dim H^k(N^{2k}, \mathbb{R}) > 0$, то $\bar{d}_k \neq \bar{\delta}^*_{k+1}$. Более того, при помощи (3.19) в этом случае устанавливается отсутствие двойственности Пуанкаре. Эти интересные феномены показывают, какую важную роль в данной теории играют глобальные аспекты топологии звеньев. Однако алгебраическим многообразиям такие феномены не свойственны, поэтому мы не углубляемся в их дальнейшее обсуждение; относящиеся сюда подробности можно найти в [C1 – C3, C6]. (Здесь важно, что алгебраическое многообразие допускает стратификацию со стратами четной коразмерности.)

Наглядно соотношение (3.19) можно пояснить так. Пусть π_2 – естественная проекция многообразия $C_{0,1}(N^m)$ на N^m

(многообразие $C_{0,1}(N^m)$ топологически эквивалентно произведению $(0,1) \times N^m$). Если y – некоторая i-форма на N^m, то поточечная норма формы $\pi_2^*(y)$ в точке (r,x) равна норме y в x, умноженной на r^{-i}. Так как площадь поперечного сечения многообразия ведет себя как r^m, то условием того, что форма $\pi_2^*(y)$ определяет элемент пространства $H^i_{(2)}(C_{0,1}(N^m))$ (т.е. того, что $\pi_2^*(y)$ принадлежит $\mathcal{L}^2$), служит как раз неравенство $m-2i>-1$, или, эквивалентно, $i \leqslant \frac{m}{2}$.

Доказательство утверждения (3.19) использует следующие операторы гомотопии. Пусть $\theta(r,x) = y(r,x) + dr \wedge \omega(r,x)$ и $a \in (0,1)$. Положим

$$K\theta = \begin{cases} \int_a^r \omega & \text{при} \quad i \leqslant \frac{m}{2}+1, \\ \int_0^r \omega & \text{при} \quad i > \frac{m}{2}+1. \end{cases} \tag{3.20}$$

Соответствующие оценки показывают, что эти интегралы сходятся и определяют ограниченные операторы в $\mathcal{L}^2$. Далее можно проверить, что

$$(\bar{d}K + K\bar{d})\theta = \begin{cases} \theta - y(a) & \text{при} \quad i < \frac{m+1}{2}, \\ \theta & \text{при} \quad i > \frac{m}{2}+1. \end{cases} \tag{3.21}$$

Случаи $i = \frac{m+1}{2}$ и $i = \frac{m}{2}+1$ немного более деликатны, но в результате все равно получается (3.19).

3.4. Пусть X^n – некоторое псевдомногообразие, т.е. симплициальный комплекс, каждая точка которого лежит в некотором замкнутом n-симплексе и каждый $(n-1)$-симплекс которого является гранью в точности двух n-симплексов, причем все n-симплексы допускают согласованную ориентацию. Мы предполагаем, что X^n вложено как подкомплекс в некоторую кусочно-линейную триангуляцию пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим через Σ^i замкнутый i-остов X^n. Индуцированная метрика задает на $X^n \setminus \Sigma^{n-2}$ структуру гладкого плоского риманова многообразия (окрестность внутренних точек $(n-1)$-симплексов изометрична открытому подмножеству в

$\mathbb{R}^n$). Предположим, что многообразие X^n снабжено метрикой, которая квазиизометрична указанной индуцированной метрике на $X^n \setminus \Sigma^{n-2}$. Тогда оно называется римановым псевдомногообразием с коническими особенностями (так например, метрика на X^n, индуцированная описанным выше вложением в $\mathbb{R}^n$, очевидно, обладает этим свойством).

Положим $H^i_{(2)}(X) = H^i_{(2)}(X \setminus \Sigma)$. Полученные ранее результаты об изолированных конических особенностях - равенство $\bar{d} = \delta^*$ и сильную теорему Ходжа - можно распространить и на этот случай. Если к тому же X обладает стратификацией со стратами четной размерности, то для комплекса пучков дифференциальных $\mathcal{L}^2$-форм на $X \setminus \Sigma$, принадлежащих $dom(d)$, выполнены все аксиомы п. 2.2. Значит, в этой ситуации $H^k_{(2)}(X) \cong IH_{n-k}(X) \cong Hom(IH_k(X), \mathbb{C})$. Этот изоморфизм можно построить и непосредственно с помощью интегрирования [C3]. При таком подходе удобнее всего использовать некий специальный подкомплекс $\mathcal{L}^2$-форм (комплекс S^* из работы [C3, с. 136]), который дает те же самые когомологии, но для форм которого всегда определено интегрирование по цепям, задающим ГМ-гомологии.

В заключение мы отметим следующие три общих факта.

Обычные группы когомологий $H^*(X^n)$ представляются формами, для которых нормы равномерно ограничены на $X^n \setminus \Sigma^{n-2}$; таковы, например, формы на некоторой открытой окрестности многообразия $X^n \subset \mathbb{R}^N$. Отсюда видно, что пространства $H^*_{(2)}(X^n)$ можно рассматривать как модули над $H^*(X^n)$.

С каждым псевдомногообразием X можно связать некоторое пространство $\hat{X}$, называемое нормализацией X [GM2]. Поскольку X и $\hat{X}$ имеют одинаковые неособые части, то $H^*_{(2)}(X) \cong H^*_{(2)}(\hat{X})$. (Топологически $\hat{X}$ - это просто метрическое пополнение неособой части $X \setminus \Sigma$.)

Рассмотрим произвольное конечное накрытие над $X \setminus \Sigma^{n-2}$. Поднимая, а затем пополняя риманову метрику с $X \setminus \Sigma$, мы получаем пространство X' и отображение $\pi : X' \longrightarrow X$, которое (топологически) есть разветвленное накрытие (см. [F]). Имеется естественное отображение $\pi^* : H^i_{(2)}(X) \longrightarrow H^i_{(2)}(X')$. По двойственности Пуанкаре оно инъективно. (Отметим, что аналитические свойства многообразия X не переносятся автоматически на X'. Например, двумерная сфера S^2 разветвленно накрывается тором T^2 , а поэтому $C(T^2)$ является разветвленным накры-

тием над $C(S^2)=\mathbb{R}^3$. Но $\dim H^1(T^2;\mathbb{R})\neq 0$, так что $\bar{d}_1\neq\delta_2^*$ на $C(T^2)$.)

3.5. Пусть X – компактное аналитическое многообразие, допускающее вложение в некоторое компактное кэлерово многообразие (например, в комплексное проективное пространство). Выбор любого такого вложения $\rho: X\longrightarrow M$ определяет на неособой части $X\setminus\Sigma$ многообразия X метрику Ω_ρ, получаемую ограничением кэлеровой метрики с M.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Класс квазиизометрии метрики Ω_ρ не зависит от вложения ρ.

Как и в п. 3.4, возьмем в качестве $H^i_{(2)}(X)$ пространство $H^i_{(2)}(X\setminus\Sigma)$, соответствующее метрике Ω_ρ. По предыдущему предложению оно не зависит от ρ.

Заметим, что в аналитическом контексте неизвестно никаких общих фактов о нормализации из п. 3.4, потому что неизвестно, квазиизометрична ли метрика на неособой части $\hat{X}$ метрике с X. Аналогичное замечание относится и к разветвленным накрытиям.

Пусть $V\subset\mathbb{C}^N$ – аналитическое подмногообразие. Оно называется конусом с вершиной $p\in V$, если $V\cap U=W\cap U$ для некоторого объединения W комплексных аффинных прямых, проходящих через p, и некоторой окрестности U точки p. Например, любое подмногообразие в $\mathbb{C}^N$, заданное однородными уравнениями, является коническим в 0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Аналитическое многообразие X называется локально-аналитически-коническим, если для каждой точки $p\in X$ имеются окрестность U и аналитическое вложение $\rho: U\longrightarrow\mathbb{C}^N$, образ которого $\rho(U)$ есть конус с вершиной в $\rho(p)$.

ПРИМЕРЫ. 1. Не всякий конус с вершиной в 0 будет локально-аналитически-коническим многообразием; например, конус $X^2Z=Y^3$ не удовлетворяет указанному выше требованию в точке $p=(0,0,1)$.

2. Всякое шубертово многообразие с одним условием (см. п. 5.2) есть локально-аналитически-коническое многообразие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Все локально-аналитически-конические многообразия являются коническими.

Иначе говоря, неособая часть локально-аналитически-конического многообразия квазиизометрична открытому плотному подмно-

жеству некоторого многогранника. Обратное неверно: любая алгебраическая кривая является коническим многообразием в смысле квазиизометрии.

СЛЕДСТВИЕ. <u>Пусть X – локально-аналитически-коническое многообразие. Тогда</u> $H^i_{(2)}(X) \cong Hom(IH_i(X), \mathbb{C})$.

Как мы уже отмечали в п. 1.7, само по себе это еще не служит основанием для справедливости теорем из кэлерова пакета в случае локально-аналитически-конических многообразий. Тем не менее они справедливы по соображениям, изложенным в подпункте об алгебраически-конических особенностях п. 6.2.

<u>3.6.</u> В заключение настоящего параграфа упомянем о следующей конструкции полных кэлеровых метрик. Пусть X – проективное алгебраическое многообразие. Как известно, существует алгебраическое разветвленное накрытие $\pi : X \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^N$. Обозначим через $Z \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^N$ дивизор ветвления этого отображения, а через $\mathcal{L}$ – соответствующее линейное расслоение на $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$, снабженное некоторой эрмитовой метрикой. Пусть Ω – кэлерова форма, отвечающая обычной метрике на пространстве $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$. Тогда если σ – голоморфное сечение расслоения $\mathcal{L}$, обращающееся в нуль на Z, а ψ – гладкая функция, для которой $\psi|Z = 1$ и $\psi = 0$ вне некоторой трубчатой ε-окрестности носителя дивизора Z, то, как и в $[GC]$, форма

$$\varepsilon' \sqrt{-1}\,(dd^c \log \log^2 \psi \|\sigma\|^2) + \Omega \tag{3.22}$$

при малых ε' определяет кэлерову форму полной кэлеровой метрики на $\mathbb{C}\mathbb{P}^N \setminus Z$. Нам неизвестно, будут ли $\mathcal{L}^2$-когомологии этой метрики изоморфны обычным когомологиям пространства $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$. Если это действительно так, то имеет смысл задаться вопросом, изоморфны ли $\mathcal{L}^2$-когомологии поднятой метрики на $X \setminus \pi^{-1}(Z)$ и когомологии $IH^*(X)$. Из положительного ответа на этот вопрос следовала бы справедливость теорем кэлерова пакета для X.

<u>§ 4. Гипотезы</u>

В этом параграфе X обозначает комплексное n-мерное проективное многообразие. Гипотеза A утверждает, что группы ГМ-гомологий удовлетворяют условиям кэлерова пакета. Гипотезы B и C утверждают справедливость теорем де Рама и Ходжа для дифференциальных $\mathcal{L}^2$-форм на неособой части многообразия X.

Обозначим через Σ множество особых точек многообразия X, а через $H^*_{(2)}(X)$ – пространство $\mathcal{L}^2$-когомологий его дополнения $X\setminus\Sigma$ (с метрикой, индуцированной вложением в проективное пространство).

ГИПОТЕЗА А (о кэлеровом пакете). Справедливы следующие утверждения:

А.1 (чистое (p,q)-разложение Ходжа). Имеется естественное разложение в прямую сумму

$$IH_k(X) = \bigoplus_{p+q=k} IH_{(p,q)}(X)$$

и

$$IH_{(p,q)}(X) \cong \overline{IH_{(q,p)}(X)}.$$

Это разложение согласовано с гомоморфизмами f^* и f_*, когда f – разветвленное накрытие или нормально неособое отображение. Например, если $f: Y \longrightarrow X$ – нормально неособое отображение относительной размерности m, то

$$f_*: IH_{(p,q)}(Y) \longrightarrow IH_{(p,q)}(X),$$

$$f^*: IH_{(p,q)}(X) \longrightarrow IH_{(p-m,q-m)}(Y).$$

Отображение $H^i(X) \to IH_{2n-i}(X)$ является морфизмом структур Ходжа.

А.2 (сильная теорема Лефшеца). Пусть H – гиперплоскость в объемлющем проективном пространстве, трансверсальная к стратификации Уитни на X. Обозначим через $\Omega \in H^2(X)$ класс когомологий пересечения $H \cap X$ (см. п. 2.1) и через $L: IH_i(X) \longrightarrow IH_{i-2}(X)$ – умножение на этот класс. Для каждого k отображение

$$L^k: IH_{n+k}(X) \longrightarrow IH_{n-k}(X)$$

является изоморфизмом.

Если определить примитивные ГМ-гомологии формулой $P_{n+k}(X) = \ker(L^{k+1})$, то имеет место разложение Лефшеца $IH_m(X) = \bigoplus_k L^k(P_{m+2k}(X))$. Это разложение согласовано с разложением Ходжа.

А.3 (двойственность Пуанкаре). Спаривание пересечения

$$IH_i(X) \times IH_{2n-i}(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

невырожденно для дополнительных размерностей.

А.4 (теорема Лефшеца о гиперплоских сечениях). Пусть H – гиперплоскость, трансверсальная ко всем стратам на X. Тогда гомоморфизм

$$IH_k(X \cap H; \mathbb{Z}) \longrightarrow IH_k(X; \mathbb{Z}),$$

индуцированный включением, является изоморфизмом при $k < n-1$ и сюръективен при $k = n-1$.

А.5 (теорема Ходжа о сигнатуре). Если $\xi \in P_{(p,q)}$ – примитивный класс ГМ-гомологий размерности $k = p+q$, то

$$(\sqrt{-1})^{p-q}(-1)^{(n-k)(n-k-1)/2} L^k(\xi \cap \bar{\xi}) > 0.$$

Обозначим через $\sigma(X)$ сигнатуру спаривания пересечения (см. А.3) на $IH_n(X)$. Тогда

$$\sigma(X) = \sum_{p+q \equiv 0 (mod\, 2)} (-1)^p \dim IH_{(p,q)}(X).$$

Гипотеза А, по-видимому, должна следовать из гипотез В и С, приводимых ниже. (Вполне возможно, что для ее вывода достаточно следующих гипотез с $\bar{H}^*_{(2)}$ вместо $H^*_{(2)}$.)

ГИПОТЕЗА В. Пространство $\mathcal{L}^2$-когомологий $H^k_{(2)}(X)$ конечномерно и изоморфно подпространству $\mathcal{H}^k$ в $\Lambda^k \cap L^2$, состоящему из квадратично-интегрируемых и одновременно замкнутых и козамкнутых дифференциальных k-форм. Кроме того, оператор J оставляет это подпространство на месте.

ГИПОТЕЗА С. Для почти любой цепи $\xi \in C_k(X)$ и почти любой дифференциальной формы $\theta \in \Lambda^k \cap L^2$ интеграл $\int_\xi \theta$ сходится, и $\int_{\partial\xi} \theta = \int_\xi d\theta$, если обе стороны равенства определены. Индуцированный гомоморфизм

$$H^k_{(2)}(X) \xrightarrow{\int} \mathrm{Hom}(IH_k(X), \mathbb{C})$$

является изоморфизмом.

§ 5. Примеры

В этом параграфе рассматриваются два класса примеров – многообразия с изолированными коническими особенностями и многообразия Шуберта с одним условием. Эти примеры используются в качестве иллюстраций в последующей части работы.

В каждом из упомянутых двух случаев мы укажем стратификацию и разрешение особенностей. Кроме того, для этих примеров будут вычислены когомологии и ГМ-гомологии, а также проверено существование (p,q)-разложения Ходжа для ГМ-гомологий.

5.1. Изолированные алгебраически-конические особенности. Разберем случай, когда многообразие X имеет одну алгебраически-коническую особую точку x. Случай нескольких изолированных алгебраически-конических особых точек аналогичен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Изолированная особая точка $x \in X$ называется алгебраически-конической, если при раздутии Хопфа $\pi: \tilde{X} \longrightarrow X$ многообразия X в точке x мы получаем неособое многообразие и соответствующий исключительный дивизор $D = \pi^{-1}(x)$ неособ.

ПРИМЕР. Всякое локально-аналитически-коническое многообразие (п. 3.5) с единственной особой точкой будет алгебраически-коническим.

Пусть $L \longrightarrow D$ – нормальное комплексное линейное расслоение дивизора D, а $S \longrightarrow D$ – его расслоение на окружности, являющееся границей трубчатой окрестности дивизора D в X. Рассмотрим соответствующую последовательность Гизина

$$H_i(D) \xrightarrow{\cap C_1 L} H_{i-2}(D) \xrightarrow{\beta} H_{i-1}(S) \xrightarrow{\alpha} H_{i-1}(D) \xrightarrow{\cap C_1 L} H_{i-3}(D),$$

где $C_1 L$ обозначает первый класс Черна расслоения L. Так как дивизор $D = \pi^{-1}(x)$ исключителен, он удовлетворяет следующему условию:

Условие стягивания. Класс $C_1 L$ представим некоторой кэлеровой формой на D, а потому для пересечений $\cap C_1 L$ выполнена сильная теорема Лефшеца.

Поскольку X – пространство с изолированными особенно-

стями, то

$$IH_i(X) = \begin{cases} H_i(X) & \text{при} \quad i > n, \\ H_i(X \setminus x) & \text{при} \quad i < n, \\ \operatorname{im}\left(H_i(X \setminus x) \longrightarrow H_i(X)\right) & \text{при} \quad i = n. \end{cases}$$

Столбец и строки следующих трех диаграмм точны:

$$\begin{tikzcd}
 & & & H_{i-1}(S) \arrow[dr, "\alpha"] & & \\
H_i(D) \arrow[r] & H_i(\tilde{X}) \arrow[r] & H_i(X) \arrow[ur] \arrow[rr] & & H_{i-1}(D) \arrow[r] & H_{i-1}(\tilde{X})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & H_{i-1}(S) \arrow[dr] & & \\
H_i(\tilde{X}\setminus D) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_i(\tilde{X}) \arrow[r] & H_{i-2}(D) \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr] & & H_{i-1}(\tilde{X}\setminus D) \arrow[r] & H_{i-1}(\tilde{X}) \\
H^{2n-i}(X) & & & & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & H_i(D) \arrow[d] \arrow[dr, "\cap C_1 L"] & \\
H^{2n-i}(X) = H_i(\tilde{X}\setminus D) \arrow[r] \arrow[dr, "\gamma"'] & H_i(\tilde{X}) \arrow[r] \arrow[d] & H_i(\tilde{X}, \tilde{X}\setminus D) = H_{i-2}(D) \\
 & H_i(\tilde{X}, D) = H_i(X) &
\end{tikzcd}$$

Если $i > n$, то из условия стягивания и последовательности Гизина вытекает, что $\alpha = 0$. Следовательно,

$$IH_i(X) = \operatorname{coker}\left(H_i(D) \longrightarrow H_i(\tilde{X})\right),$$

и на этом пространстве имеется (p,q)-разложение Ходжа, индуцированное с $\tilde{X}$.

Аналогично если $i < n$, то $\beta = 0$, откуда

$$IH_i(X) = \ker\left(H_i(\tilde{X}) \longrightarrow H_{i-2}(D)\right),$$

и также имеется чистое разложение.

Наконец, если $i = n$, то отображение $\cap\, C_1 L$ в последней диаграмме является изоморфизмом. Значит,

$$IH_n(X) = \ker\left(H_n(\tilde{X}) \longrightarrow H_{n-1}(D)\right),$$

а это пространство обладает чистым разложением.

5.2. Многообразия Шуберта с одним условием. Фиксируем целые числа

$$\begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & \leq & & \leq & \\ i & & & & l \\ & \leq & & \leq & \\ & & k & & \end{array}$$

Пусть $F^j \subset \mathbb{C}^l$ – фиксированное j-мерное подпространство, а $G_k(\mathbb{C}^l)$ – грассманово многообразие k-плоскостей в $\mathbb{C}^l$. Положим

$$\mathcal{S} = \{ V^k \in G_k(\mathbb{C}^l) \mid \dim(V^k \cap F^j) \geq i \}.$$

Такое многообразие $\mathcal{S}$ называется многообразием Шуберта с одним условием. Его комплексная размерность равна $i(j-i)(k-i)(l-k)$. Рассмотрим также многообразие

$$\tilde{\mathcal{S}} = \left\{ \text{частичные флаги} \quad (W^i \subset V^k \subset \mathbb{C}^l) \mid W^i \begin{array}{c} \subset F^j \subset \\ \subset V^k \subset \end{array} \mathbb{C}^l \right\}.$$

Отображение $\pi : \tilde{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathcal{S}$, задаваемое формулой $\pi(W^i \subset V^k) = V^k$, является разрешением особенностей. Само $\mathcal{S}$ стратифицировано следующими многообразиями Шуберта с одним условием:

$$\mathcal{S}_p = \{ V^k \in G_k(\mathbb{C}^l) \mid \dim(V^k \cap F^j) \geq p \},$$

где $i \leq p \leq \min(j,k)$. Коразмерность $\mathcal{S}_p$ в $\mathcal{S}$ равна $C = (l-k)[i(j-i)(k-i) - p(j-p)(k-p)]$. Если $x \in \mathcal{S}_p \setminus \mathcal{S}_{p+1}$, то $\dim(\pi^{-1}(x)) = i(p-i)$. Но так как $i(p-i) < (1/2)C$, то $\tilde{\mathcal{S}}$ есть малое разрешение многообразия $\mathcal{S}$. Значит, $IH_*(\mathcal{S}) \cong H_*(\tilde{\mathcal{S}})$ (см. [GM3]). Отсюда вытекает, что пространство $IH_*(\mathcal{S})$ наследует разложение Ходжа с $\tilde{\mathcal{S}}$. (Известно, что $H_{p,q}(\tilde{\mathcal{S}}) = 0$ при $p \neq q$, а потому то же самое верно для $IH_{p,q}(\mathcal{S})$.)

Опишем теперь многочлены Пуанкаре этих пространств. Положим

$$P_n(t) = 1(1+t^2)(1+t^2+t^4) \ \ldots \ (1+t^2+\ldots+t^{2n-2}).$$

Тогда многочлен Пуанкаре $Q_l^k(t)$ пространства $G_l(\mathbb{C}^k)$ имеет

вид

$$Q_l^k(t) = \frac{P_l(t)}{P_k(t)P_{l-k}(t)}.$$

Многочлен Пуанкаре для гомологий $IH_*(\mathcal{Y})$ равен $Q_i^k(t)\,Q_{j-i}^{l-i}(t)$, а для $H^*(\mathcal{Y})$ равен

$$\sum_{i \le p \le \min(j,k)} Q_p^k(t)\,Q_{j-p}^{l-k}(t)\,t^{2j(j-p)}$$

(каждый член этой суммы является вкладом соответствующего страта).

Отображение $H^*(S) \to H^*(\widetilde{S}) \cong IH_*(S)$ представляет собой инъекцию. Используя описанные выше многочлены Пуанкаре, легко убедиться, что в общем случае это отображение отнюдь не сюръективно.

§ 6. Как обстоят дела с гипотезами

В этом параграфе мы представим все известные на данный момент факты, которые свидетельствуют в пользу гипотез § 4.

В п. 6.1 мы обсудим ту часть кэлерова пакета, которая уже доказана для всех комплексных проективных многообразий. Соответствующие методы доказательства либо топологические, либо алгебраические; они никак не используют $\mathcal{L}^2$-анализа. Главным пробелом в настоящее время является отсутствие доказательства существования чистого (p,q)-разложения Ходжа в общем случае.

Даже в неособом случае, чтобы найти (p,q)-разложение, инвариантное относительно сопряжения, необходимо привлекать анализ В особом случае имеются два возможных подхода: один - свести задачу к неособому случаю, например разрешением особенностей, другой - развить $\mathcal{L}^2$-анализ прямо на самом особом многообразии. Что касается первой возможности, то здесь имеется гипотеза, утверждающая, что ПМ-гомологии многообразия X всегда являются прямыми слагаемыми гомологий любого его разрешения $\widetilde{X}$ и при этом включение гомологий $IH_*(X)$ в $H_*(\widetilde{X})$ согласовано с разложением Ходжа на $H(X)$ (см. [GM3]). Конечно, из справедливости этой гипотезы сразу бы вытекало существование чистого разложения Ходжа для X, однако создается впечатление, что доказательство данной

гипотезы в общем случае должно быть очень сложным. В п. 6.2 мы опишем ряд частных случаев, в которых эту гипотезу удается подтвердить.

Что же касается анализа на самом многообразии X, то здесь, как уже отмечалось в п. 1.8 и § 3, снова имеются два подхода. Один - использовать метрику на неполном многообразии $X\setminus\Sigma$, индуцированную включением $X\subset\mathbb{C}\mathbb{P}^N$; другой - придумать некоторую полную метрику. В обоих случаях соответствующий анализ чрезвычайно деликатен и связан с пока еще плохо понятыми аспектами метрической структуры многообразия X. Разобраться в этих вопросах для многообразий X общего вида, может быть, даже труднее, чем реализовать подход, использующий разрешение X, однако конечное понимание дифференциальной геометрии особенностей многообразия X было бы чрезвычайно интересно само по себе. Всё, что сделано здесь по сегодняшний день, вкратце изложено в п. 6.4.

<u>6.1. Результаты для случая общих многообразий.</u> <u>Двойственность Пуанкаре.</u> Как мы уже упоминали в § 2, теорема двойственности Пуанкаре (утверждающая невырожденность спаривания $IH_i(X)\times IH_{2n-i}(X)\longrightarrow\mathbb{C}$) верна для всех проективных многообразий X.

<u>Слабая теорема Лефшеца.</u> Слабая теорема Лефшеца (§ 4, А.4) доказана для всех комплексных проективных многообразий. Одно из доказательств [GM3] использует пучковые методы, основанные на идеях Артина [A], другое привлекает методы теории Морса [GM4].

<u>Сильная теорема Лефшеца.</u> Как нам сообщил О. Габбер, он нашел доказательство сильной теоремы Лефшеца (§ 4, А.2) для ℓ-адического аналога гомологий $IH_*(X)$, в случае когда X - алгебраическое многообразие, определенное над некоторым полем характеристики p. Отсюда вытекает, что то же самое верно и в характеристике 0.

<u>Чистота в характеристике p.</u> Кроме того, доказательство Габбера показывает, что ℓ-адический аналог гомологий $IH_*(X)$ является чистым в смысле Делиня (т.е. все собственные значения действия Фробениуса имеют одно и то же абсолютное значение). Согласно эвристическому словарю Делиня [D1, § 3], этот резуль-

тат представляет собой ℓ-адический аналог гипотезы А.I § 4. Однако это дает лишь моральную поддержку и не влечет за собою существования (p,q)-разложения.

Смешанные структуры Ходжа. От Вердье нам стало известно, что имеется пучковая техника, с помощью которой можно ввести некоторую смешанную структуру Ходжа на $IH_*(X)$. Остается только показать, что эта смешанная структура Ходжа чиста.

6.2. Некоторые специальные классы многообразий. Кривые и поверхности. Гипотеза о (p,q)-разложении Ходжа (§ 4, А.I) верна для многообразий X комплексной размерности 1 и 2. Для кривых это так, потому что $IH_*(X) = IH_*(\hat{X})$, где $\hat{X}$ – нормализация кривой X, которая всегда неособа. Для поверхностей (p,q)-разложение гомологий $IH_*(X)$ можно получить из соответствующего разложения для $H_*(\tilde{X})$, где $\tilde{X}$ – минимальное разрешение особенностей многообразия X. Доказательство в данном случае аналогично доказательству из п. 5.I, только вместо условия обильности нормального расслоения к исключительному дивизору используется условие Грауэрта для стягивания.

Многообразия Шуберта. Для многообразий Шуберта с одним условием (п. 5.2) группы $IH_*(X)$ изоморфны группам когомологий описанного выше малого разрешения $\hat{X}$, а потому обладают (p,q)-разложением Ходжа.

Алгебраически-конические особенности. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Моноидальное преобразование $\pi : \hat{Y} \to Y$ с центром в подмногообразии $Z \subset Y$ называется чистым раздутием, если

1) Z неособо;

2) отображение $D \to Z$, где $D = \pi^{-1}(Z)$ – исключительный дивизор, есть топологическое расслоение;

3) включение $D \subset \hat{Y}$ нормально неособо (§ 2).

Про многообразие X говорят, что оно имеет алгебраически-конические особенности, если его особенности можно разрешить последовательностью чистых раздутий. (Последовательность центров Z можно выбрать так, чтобы их размерность возрастала.) К примеру, всякое локально-аналитически-коническое многообразие имеет алгебраически-конические особенности; обратное неверно.

Для многообразий с алгебраически-коническими особенностями (p,q)-разложение группы $IH_*(X)$ индуцируется соответствующим разложением группы $IH_*(\hat{X})$, где $\hat{X}$ – разрешение особенно-

стей последовательностью чистых раздутий. Доказывается это аналогично случаю изолированных конических особенностей (п. 5.1); в ходе доказательства надо использовать сильную теорему Лефшеца в варианте Габбера и принадлежащий Делиню [D6] критерий вырождения спектральной последовательности, связанной с расслоением $D \to Z$.

Рациональные гомологические многообразия. Примером рационального гомологического многообразия может служить фактормногообразие гладкого компактного многообразия по гладкому действию произвольной конечной группы.

Пусть X - алгебраическое многообразие, являющееся рациональным гомологическим многообразием. Поскольку для X (как и для любого рационального гомологического многообразия) когомологии совпадают с IН-гомологиями [GM2], достаточно найти (p,q)-разложение Ходжа для когомологий X. Но, как заметил Делинь, такое разложение существует, ибо в силу двойственности Пуанкаре когомологии многообразия X вкладываются в когомологии любого разрешения его особенностей, а потому структуру Ходжа можно наследовать с разрешения.

6.3. Результаты в специальных размерностях. Первое число Бетти. Для всех проективных многообразий X числа $\dim(IH_1(X))$ четны (как и должно было бы следовать из существования (p,q)-разложения, инвариантного относительно сопряжения). Это получается по индукции применением слабой теоремы Лефшеца и непосредственной проверкой в случае поверхностей (см. п. 6.2). Кроме того, всегда имеет место изоморфизм $IH_1(X) \cong H_1(\hat{X})$, где $\hat{X}$ — нормализация многообразия X [GM2]. Отсюда вытекает такое следствие, на которое обратил наше внимание Хорроко:

СЛЕДСТВИЕ. Для любого нормального проективного многообразия X первое число Бетти многообразия X (в смысле обычных гомологий) четно.

Многообразия с небольшими особенностями. Предположим, что множество особенностей многообразия X имеет размерность $\leqslant p$. Тогда, выполнив последовательно $p+1$ раз процедуру взятия общего гиперплоского сечения, мы получим неособое многообразие. Поэтому повторное применение теоремы Лефшеца о гиперплоских сечениях дает следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Группы $IH_k(X)$ имеют чистое (p,q)-разложение Ходжа при всех $k<n-p-1$ и всех $k>n+p+1$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Если еще воспользоваться тем фактом, что группы $IH_*(X)$ имеют в некотором смысле естественную смешанную структуру Ходжа (см. п. 6.1), то эту теорему можно распространить и на случаи $k=n-p-1$ и $k=n+p+1$.

2. Основываясь на тех же идеях, можно показать, что сильное отображение Лефшеца $L^k: IH_{n+k}(X)\to IH_{n-k}(X)$ является изоморфизмом при всех $k>p+1$.

6.4. $\mathcal{L}^2$-когомологии. Как мы уже объясняли в § 3, для компактных пространств с коническими особенностями имеет место изоморфизм $H^*_{(2)}(X)\cong IH^*(X)$ и выполнена сильная теорема Ходжа. Однако даже если предположить дополнительно, что метрика на неособой части многообразия X кэлерова, то и этого еще не будет достаточно для получения кэлерова пакета, потому что оператор почти-комплексной структуры J может не оставлять на месте пространства $\mathcal{H}^i$ (правда, есть гипотеза, что всё-таки J оставляет на месте пространства $\mathcal{H}^i$, когда все особенности конические в подходящем комплексно-аналитическом смысле, например когда X – алгебраическое многообразие с метрикой, индуцированной вложением в $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$; см. § 4). В настоящий момент известны два случая, в которых проверено, что $\mathcal{H}^i$ сохраняется при действии J (подробности см. в [C4]).

Изолированные метрически-конические особенности.

Пусть $C(N^m)$ – метрический конус с нечетным $m=2k-1$. Тогда, как можно показать, из включения $h\in\mathcal{L}^2$ и равенства $\Delta h=0$ вытекает, что $h\in\mathcal{H}^i$, за возможным исключением следующих случаев: $i=\frac{m-1}{2}$, $\frac{m+1}{2}$, $\frac{m+3}{2}$. Значит, если метрика на $C(N^m)$ кэлерова, то $J(\mathcal{H}^i)=\mathcal{H}^i$, кроме, быть может, трех указанных размерностей. Предположим теперь дополнительно, что комплексная структура конуса инвариантна относительно однопараметрической группы гомотетий на $C(N^m)$; так будет, например, если $C(N^m)$-комплексный аффинный конус. Прямая проверка показывает, что в таком случае оператор J сохраняет пространство форм θ, для которых $\theta, d\theta$, $d\delta\theta, \delta d\theta\in\mathcal{L}^2$. Этого достаточно для доказательства того, что $J(\mathcal{H}^i)=\mathcal{H}^i$ для всякого компактного кэлерова многообразия с изолированными метрически-коническими особенностями и оператором J, коммутирующим с гомотетиями. Более того, то же самое

верно, если метрика и комплексная структура удовлетворяют этим условиям с точностью до членов достаточно высокого порядка в каждой особой точке.

Кусочно-плоские пространства. Используя индукцию и "метод спуска", можно распространить рассуждения из предыдущего примера на некоторые кусочно-плоские пространства (ср. [CT, пример 4.5]). Вместо того чтобы давать общее определение этого класса пространств, мы покажем, как строятся некоторые их примеры. Пусть Y – компактное кэлерово многообразие с плоской метрикой g, а Z – произвольное объединение компактных глобальных комплексных геодезических гиперповерхностей, и пусть $\pi: X \to Y$ – некоторое конечное разветвленное накрытие многообразия Y с ветвлением вдоль Z. Тогда пополнение метрики $\pi^*(g)$ с $X \setminus \pi^{-1}(Z)$ снабжает X структурой кусочно-плоского пространства с метрически-коническими особенностями, и $J(\mathcal{H}^i) = \mathcal{H}^i$ для X. Более того, в этой конструкции в качестве Y и Z можно брать факторпространства кусочно-плоских пространств. Например, пусть Y есть пространство, полученное факторизацией произведения $\underbrace{\mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}}_{n}$ по группе, порожденной стандартной решеткой, умножением на -1 в каждом сомножителе и перестановками сомножителей. Тогда Y гомеоморфно $\mathbb{CP}^n$.

Заметим, что в обоих предыдущих случаях к существу дела относятся лишь кэлеровы свойства. Поэтому от X не обязательно требовать, чтобы оно было алгебраическим многообразием.

Полные метрики (см. [Zu1, Zu2, M]). В [Zu2] Цуккер рассмотрел некий класс локально-симметрических пространств $\Gamma \setminus X$, для которых естественная полная метрика кэлерова и имеет конечный объем. Он показал, что группа $H^*_{(2)}(\Gamma \setminus X)$ естественно изоморфна группе $IH^*(\Gamma \setminus X^*)$, где $\Gamma \setminus X^*$ – компактификация Бейли – Бореля факторпространства $\Gamma \setminus X$.

§ 7. Связь со смешанной теорией Ходжа

В работах [D1 - D3] Делинь ввел понятие смешанной структуры Ходжа на когомологиях произвольного алгебраического многообразия X. Эта структура задает фильтрацию

$$W_0 \subset W_1 \subset \ldots \subset W_{2i} = H^i(X),$$

такую что каждое факторпространство W_j/W_{j-1} снабжено некоторым (p,q)-разложением Ходжа с $p+q=j$ (т.е. W_j/W_{j-1} имеет чистый вес j). Он установил следующие факты:

$$X \text{ компактно} \implies W_i = W_{i+1} = \ldots = W_{2i}, \qquad (7.1)$$

$$X \text{ гладко} \implies W_0 = W_1 = \ldots = W_{i-1} = 0 . \quad (7.2)$$

В п. 7.1 описывается (гипотетическая) связь между смешанными структурами Ходжа на когомологиях многообразия X и (гипотетическими) чистыми структурами Ходжа на гомологиях $IH_*(X)$. В п. 7.2 мы строим обе эти структуры по чистой структуре Ходжа на разрешении особенностей многообразия X для того случая, когда X имеет изолированные особенности. Как мы увидим, при таком способе действий с ПМ-гомологиями необходимо одно дополнительное условие. Это условие уточняется в п. 7.3, в связи с чем появляются некоторые новые (гипотетически) необходимые условия для стягиваний.

<u>7.1.</u> ГИПОТЕЗА. $W_{i-1}(H^i(X)) = \ker(H^i(X) \to IH_{2n-i}(X))$.

Отметим, что данное ядро должно содержать подпространство W_{i-1}, если верна гипотеза А.1 § 4 о (p,q)-разложении Ходжа (потому что само отображение вполне согласовано с фильтрацией ([D 2, п. 2.3.5]). В качестве следствия из этой гипотезы вытекает, что (гипотетическая) чистая структура Ходжа на $IH_{2n-i}(X)$ определяет такую же структуру на W_i/W_{i-1}, задаваемую смешанной структурой Ходжа. Обратное неверно. Для многообразий Шуберта с одним условием (п. 5.2) отображение $W_i/W_{i-1} \to IH_{2n-i}(X)$ не сюръективно.

Непосредственная проверка показывает, что гипотеза 7.1 верна для всех примеров из § 5.

В [D5] Делинь высказал предположение о существовании некой техники, которая позволила бы аналогично определить структуры Ходжа на других факторпространствах W_j/W_{j-1}, используя чистые структуры Ходжа на других группах ПМ-гомологий. Эта техника могла бы найти применение при изучении гиперкогомологий комплексов алгебраических пучков (не говоря уже про обычные когомологии), что позволило бы расширить теорию смешанных структур Ходжа на такие группы гиперкогомологий.

7.2. В данном пункте мы опишем конструкцию Делиня весовой фильтрации на когомологиях пространства с одной изолированной особенностью. Эта конструкция индуцирует смешанную структуру Ходжа на ПМ-гомологиях.

Пусть D – произвольное компактное подмногообразие неособого n-мерного комплексного многообразия $\tilde{X}$. Прежде всего построим смешанную структуру Ходжа на когомологиях пространства $\tilde{X}/D$ (полученного сжатием подмногообразия D в точку). В том случае, когда $\tilde{X}/D$ допускает структуру алгебраического многообразия X (согласованную с проекцией $\tilde{X} \to X$), мы получим в результате смешанную структуру Ходжа для X. Запишем точную последовательность пары (см. вторую диаграмму из п. 5.1):

$$\to H^{i-1}(X) \to H^{i-1}(\tilde{X}) \xrightarrow{\theta} H^{i-1}(D) \to H^i(X) \to H^i(\tilde{X}) \xrightarrow{\theta} H^i(D) \to .$$

Имеем

$$W_i = H^i(X),$$

$$W_{i-1} = \operatorname{coker}\,(H^{i-1}(\tilde{X}) \to H^{i-1}(D)),$$

$$W_j = W_j\,(H^{i-1}(D)) \quad \text{при} \quad j < i-1 .$$

Из рассмотрения данной точной последовательности (и того факта, что каждый гомоморфизм вполне согласован с данной фильтрацией) видно, что W_j/W_{j-1} имеет чистое (p,q)-разложение Ходжа веса j.

Так как $H^i(X) \cong IH_{2n-i}(X)$ при $i > n$ и $\mathrm{Hom}(H^i(X), \mathbb{C}) \cong IH_i(X)$ при $i < n$, мы получаем отсюда смешанные структуры Ходжа на $IH_j(X)$ при всех $j \neq n$. (Однако импликация (7.1), вообще говоря, уже не имеет места). Привлекая третью диаграмму п. 5.1, легко убедиться, что гомологии $IH_n(X)$ обладают чистой структурой Ходжа веса n. Заметим, что построенная смешанная структура Ходжа на $IH_*(X)$ зависит только от алгебраической структуры на $\tilde{X} \setminus D$ – неособом куске многообразия X.

Это приводит нас к следующему результату.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. _Для того чтобы гомологии_ $IH_*(X)$ _имели чистую структуру Ходжа, необходима и достаточна сюръективность отображения_

$$\theta : H^i(\tilde{X}) \to H^i(D)$$

при всех $i \geqslant n$, или, что равносильно, инъективность отображения

$$H_j(D) \longrightarrow H_j(\tilde{X})$$

при всех $j \geqslant n$.

Отметим, что в примере из п. 5.I выполнение этого условия гарантируется условием стягивания. Однако даже в этом примере когомологии обладают лишь смешанной структурой Ходжа. Итак, чтобы доказать существование чистой структуры Ходжа для ГМ-гомологий многообразия с одной изолированной особенностью, необходимо проверить выполнение указанного условия для всех разрешений. Как это делать в общем случае, неясно. В то же время предыдущая конструкция смешанной структуры Ходжа (на H^* и IH_*) не требует никаких дополнительных предположений. По-видимому, существование чистой структуры Ходжа на $IH_*(X)$, связано с более тонкой структурой рассматриваемого многообразия, чем та, которая обеспечивает существование смешанной структуры Ходжа на когомологиях.

7.3. Обратим теперь исследуемый вопрос и посмотрим, какие условия стягивания вытекают из высказанных выше идей.

Пусть D - произвольное (компактное) подмногообразие неособого компактного n-мерного алгебраического многообразия $\tilde{X}$. Предположим, что $X=\tilde{X}/D$ - алгебраическое многообразие.

ГИПОТЕЗА. Отображение $H_j(D) \to H_j(\tilde{X})$ инъективно при всех $j \geqslant n$, а по локальным соображениям это верно и вблизи D, т.е. если T - некоторая трубчатая окрестность подмногообразия D в $\tilde{X}$ с границей S, то отображение $H_j(T) \to H_j(T,S)$ инъективно при всех $j \geqslant n$.

(Эта гипотеза является следствием "гипотезы о прямой сумме" из [GM3].)

ЗАМЕЧАНИЕ. Локальное условие сильнее глобального, потому что имеет место разложение

$$\begin{tikzcd}
H_j(D) \cong H_j(T) \arrow[r] \arrow[drr] & H_j(\tilde{X}) \arrow[r] & H_j(\tilde{X}, \tilde{X}\setminus D) \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] \\
& & H_j(T,S)
\end{tikzcd}$$

Отметим два интересных следствия сформулированной гипотезы.

СЛЕДСТВИЕ I. <u>При всех</u> $j \geqslant n$ <u>смешанная структура Ходжа на</u>

$$H_j(D) = \ker\left(H_j(\tilde{X}) \to IH_j(X)\right)$$

<u>в действительности чиста.</u>

СЛЕДСТВИЕ 2. <u>Отображение, задаваемое включением в</u> $\tilde{X}$ <u>и последующим ограничением на</u> D :

$$H_i(D) \cong H_i(T) \to H_i(T,S) \xrightarrow{\cong} H^{2n-i}(T) \cong H^{2n-i}(D),$$

<u>инъективно.</u>

Следствие 2 представляет собой часть условия отягивания из п. 5.1, так как композиция $H_i(D) \to H^{2n-i}(D) \to H_{i-2}(D)$ совпадает с отображением $\cap C_1 L$.

Если X – поверхность, а D – дивизор с нормальными пересечениями, то необходимое и достаточное условие отягивания Грауэрта состоит в том, что соответствующая форма пересечения отрицательно-определённа. Наше же необходимое условие (2) заключается в том, что данная форма пересечения невырождена.

* *

Необходимо упомянуть еще о следующих трех недавних сюжетах, отражающих важность ГМ-гомологий. Первый из них, касающийся связи с модулями над кольцами дифференциальных операторов, разработан Брылински , Касиварой и Каваи, Бейлинсоном и Бернштейном (см. работы [2, 3, 8, 9] из литературы, добавленной при переводе). Второй – о связи с чистыми комплексами пучков в характеристике p – развит Делинем, Габбером, Бейлинсоном и Бернштейном (см. [5 - 7, а также 2, 16] . Третий, может, и не такой недавний, отражен в большой серии работ [I, I0 - I5, I7 - I9].

ЛИТЕРАТУРА

Литература к основному тексту

[Ak] E. Akin, Stiefel-Whitney homology classes and bordism, Trans. Amer. Math. Soc. 205 (1975), 341-359.

[Al] F. Almgren, The homotopy groups of the integral cycle groups, Topology 1 (1962), 257-299.

[SGA-4] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, P. Deligne, B. Saint-Donat, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, Tome 3, Séminaire de Géométrie Algébrique de Bois-Marie 1963/64, Springer Lect. Notes in Math. 305 (1972).

[ABS] M.F. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro, Clifford modules, Topology 3 (1964), 3-38.

[AH_1] M.F. Atiyah, F. Hirzebruch, Cohomologie-Operationen und charakteristische Klassen, Math. Z. 77 (1961), 149-187.

[AH_2] M.F. Atiyah, F. Hirzebruch, The Riemann-Roch theorem for analytic imbeddings, Topology 1 (1961), 151-166.

[AH_3] M.F. Atiyah, F. Hirzebruch, Riemann-Roch for differentiable manifold, Bull. Amer. Math. Soc. 65 (1959), 276-281.

[AS] M.F. Atiyah, I.M. Singer, The index of elliptic operators I, IV, V, Ann. Math. 87 (1968), 484-530; 93 (1971), 119-149. [Имеется перевод: Атья М.Ф., Зингер И.М., Индекс эллиптических операторов, I, IV, V, УМН, 1968, 23, № 5, с. 99-142; 1972, 27, № 4, с. 161-188.]

[BM] T. Banchoff, C. McCrory, Whitney duality and singularities of projections, Geometry and Topology, Rio de Janeiro, Springer Lect. Notes in Math. 597 (1977), 68-81.

[BFM_1] P. Baum, W. Fulton, R. MacPherson, Riemann-Roch for singular varieties, Publ. Math. I.H.E.S. 45 (1975), 101-145.

[BM$_2$] P. Baum, W. Fulton, R. MacPherson, Riemann-Roch and topological K-theory for singular varieties, Acta Math. 143 (1979), 155-192.

[BFQ] P. Baum, W. Fulton, G. Quart, Lefschetz-Riemann-Roch for singular varieties, Acta Math. 143 (1979), 193-211.

[SGA-6] P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie et al., Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1966/67, Springer Lect. Notes in Math. 225 (1971).

[BRS] S. Buoncristiano, C.P. Rourke, B. Sanderson, A geometric approach to homology theory, London Math. Soc. Lect. Note Ser. 18 (1976), Cambridge Univ. Press.

[Ch] J. Cheeger, A combinatorial formula for Stiefel-Whitney classes, Topology of Manifolds, Markham, Chicago, 1971.

[SGA-4$\frac{1}{2}$] P. Deligne, Cohomologie étale, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA 4$\frac{1}{2}$, Springer Lect. Notes in Math. 569 (1977).

[Do$_1$] A. Dold, Lectures on algebraic topology, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1972.

[Do$_2$] A. Dold, The fixed point transfer of fibre preserving maps, Math. Z. 148 (1976), 215-244.

[Do$_3$] A. Dold, Geometric cobordism and the fixed point transfer, in: Algebraic Topology Proceedings, Vancouver 1977, Springer Lect. Notes in Math. 673 (1979), 32-87. [Имеется перевод: Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. - М.: Мир, 1976.]

[DV] A. Douady, J.-L. Verdier, Séminaire de Géométrie Analytique (E.N.S.) 1974/75, Astérisque 36-37 (1976).

[Dy] E. Dyer, Cohomology theories, W.A. Benjamin, Reading, Mass., 1969.

[ES] S. Eilenberg, N. Steenrod, Foundations of algebraic topology, Princeton Univ. Press, 1952. [Имеется перевод: Стинрод Н., Эйленберг С. Основания алгебраической топологии. - М.: Физматгиз, 1958.]

[Fu$_1$] W. Fulton, Rational equivalence on singular varieties, Publ. Math. I.H.E.S. 45 (1975), 147-167.

[Fu$_2$] W. Fulton, Rational equivalence and intersection theory, to appear.

[Fu_3] W. Fulton, A note on residual intersections and the double point formula, Acta Math. 140 (1978), 93-101.

[Fu_4] W. Fulton, A fixed point formula for varieties over finite fields, Math. Scand. 42 (1978), 189-196.

[FL] W. Fulton, D. Laksov, Residual intersections and the double point formula, in: Real and Complex Singularities, Oslo 1976, Sijthoff & Noordhoff, 1978, 171-177.

[FM_1] W. Fulton, R. MacPherson, Intersecting cycles on an algebraic variety, in: Real and Complex Singularities, Oslo 1976, Sijthoff & Noordhoff, 1978, 179-197.

[FM_2] W. Fulton, R. MacPherson, Defining algebraic intersections, in: Algebraic Geometry Proceedings, Tromsø, Norway 1977, Springer Lect. Notes in Math. 687 (1978), 1-30.

[Gi_1] H. Gillet, Universal cycle classes, preprint.

[Gi_2] H. Gillet, Riemann-Roch theorems for higher algebraic K-theory, preprint.

[Go] R.M. Goresky, Geometric cohomology and homology of stratified objects, Thesis, Brown Univ., 1976.

[HT_1] S. Halperin, D. Toledo, Stiefel-Whitney homology classes, Ann. Math. 96 (1972), 511-525.

[HT_2] S. Halperin, D. Toledo, The product formula for Stiefel--Whitney classes, Proc. Amer. Math. Soc. 48 (1975), 239-244.

[Ha_1] R. Hartshorne, Residues and Duality, Springer Lect. Notes in Math. 20 (1966).

[Ha_2] R. Hartshorne, On the De Rahm cohomology of algebraic varieties, Publ. Math. I.H.E.S. 45 (1975), 6-99.

[Hi_1] F. Hirzebruch, A Riemann-Roch formula for differentiable manifolds, Séminaire Bourbaki 177 (1959).

[Hi_2] F. Hirzebruch, Topological methods in algebraic geometry, 3rd ed., Springer-Verlag, New York, 1966. [Имеется перевод: Хирцебрух Ф. Топологические методы в алгебраической геометрии. – М.: Мир, 1973.]

[Iv] B. Iversen, Cohomology of sheaves, to appear.

[Ke] M. Kervaire, Opérations d'Adams en théorie des représentations linéaires des groupes finis, l'Ens.Math. 22 (1976), 1-28.

[Kl_1] S.L. Kleiman, The enumerative theory of singularities, in: Real and Complex Singularities, Oslo 1976, Sijthoff & Noordhoff, 1978, 297-396.

[Kl_2] S.L. Kleiman, Multiple point formulas, to appear.

[Lak] D. Laksov, Residual intersections and Todd's formula for the double locus of a morphism, Acta Math. 140 (1978), 75-92.

[Lam] T.-Y. Lam, Induction theorems for Grothendieck groups and Whitehead groups of finite groups, Ann. Sci. École Norm. Sup.(4) 1 (1968), 91-148.

[LT] Lê Dũng Tráng, B. Teissier, Variétés polares locales et classes de Chern des variétés singulieres, École Polytechnique, Centre de Mathématiques, preprint, 1979.

[LR] C.N. Lee, F. Raymond, Čech extensions of contravariant functors, Trans. Amer. Math. Soc. 133 (1968), 415-434.

[Lu] S. Lubkin, Finite generation of lifted p-adic homology with compact supports, generalization of the Weil conjectures to singular, non-complete algebraic varieties, J. Number Theory 11 (1979), 412-464.

[Mac_1] R. MacPherson, Chern classes of singular varieties, Ann. Math. 100 (1974), 423-432.

[Mac_2] R. MacPherson, The combinatorial formula of Gabrielov, Gelfand, and Losik for the first Pontrjagin class, Séminaire Bourbaki 497 (1977).

[Man] Ю.И. Манин, Соответствия, мотивы и моноидальные преобразования, Мат. сб. 77 (119) (1969), 475-507.

[Mi] J. Milnor, Remarks concerning spin manifolds, in: Differential and Combinatorial Topology, Symp. in honor of Marston Morse (S.S. Cairns, ed.), Princeton Univ. Press, 1965.

[PS] C. Peskine, L. Szpiro, Dimension projective finie et cohomologie locale, Publ. Math. I.H.E.S. 42 (1973), 323-395.

[Qua] G. Quart, Localization theorem in K-theory for singular varieties, Acta Math. 143 (1979), 213-217.

[Qui_1] D. Quillen, Higher algebraic K-theory. I, Algebraic K-theory. I, Battelle Institute Conference 1972, Springer Lect. Notes in Math. 341 (1973), 85-147.

[Qui_2] D. Quillen, Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operations, Advances Math. 7 (1971), 29-56.

[Sch] M.H. Schwartz, Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe, C.R. Acad. Sci. Paris, 260 (1965), 3262-3264, 3535-3537.

[Se] J.-P. Serre, Algèbre locale. Multiplicités, Springer Lect. Notes in Math. 11 (1965).

[Sp] E.H. Spanier, A formula of Atiyah and Hirzebruch, Math. Z. 80 (1962), 154-162.

[Sto] R.E. Stong, Notes on cobordism theory, Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1968. [Имеется перевод: Стонг Р. Заметки по теории кобордизмов. – М.: Мир, 1973.]

[Su] D. Sullivan, Combinatorial invariants of analytic spaces, Proc. of Liverpool Singularities Symp. I, Springer Lect. Notes in Math. 192 (1971), 165-177.

[Sw] R.G. Swan, Induced representations and projective modules, Ann. Math. 71 (1960), 552-578.

[Th] R. Thom, Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment. Math. Helv. 28 (1954), 17-86. [Имеется перевод: Том Р. Некоторые свойства "в целом" дифференцируемых многообразий. – В сб.: Расслоенные пространства и их приложения. – М.: ИЛ, 1958, с. 293–351.]

[TT] D. Toledo, Y.L.L. Tong, Chern classes and Riemann-Roch for coherent sheaves. I, II, preprint.

[Ve_1] J.-L. Verdier, Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts, Séminaire Bourbaki 300 (1965).

[Ve_2] J.-L. Verdier, On a theorem of Wilder, in: Applications of Categorical Algebra 1968, Proc. Symp. Pure Math. 27 (1970), 184-193.

[Ve_3] J.-L. Verdier, Base change for twisted inverse image of coherent sheaves, in: Algebraic Geometry, Bombay 1968, Oxford, 1969, 393-408.

[Ve_4] J.-L. Verdier, Spécialisation des classes de Chern, Séminaire Douady-Verdier (E.N.S.) 1978/79, Astérisque, to appear.

[Ve_5] J.-L. Verdier, Le théorème de Riemann-Roch pour les intersections complètes, Astérisque 36-37 (1976), 189-228.

[Wh] G.W. Whitehead, Generalized homology theories, Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962), 227-283.

[Whit] H. Whitney, On the theory of sphere bundles, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 26 (1940), 148-153.

Литература к добавлению

[A] M. Artin, Théorème de finitude pour un morphism propre: dimension cohomologique des schemas algébriques affines, SGA 4, exp. 15, Springer Lect. Notes in Math. 305 (1973).

[APS] M. Atiyah, V. Patodi, I. Singer, Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I - III, Math. Proc. Cam. Phil. Soc. 77 (1975), 43-69; 78 (1976), 405-432, 79 (1976), 315-330.

[AV] A. Andreotti, E. Vesentini, Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds, Publ. Math. I.H.E.S. 25 (1965), 81-130.

[C_1] J. Cheeger, On the spectral geometry of spaces with cone-like singularities, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 76 (1979), 2103-2106.

[C_2] J. Cheeger, Spectral geometry of spaces with cone-like singularities, preprint, 1978.

[C_3] J. Cheeger, On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds, Proc. Symp. Pure Math. 36 (1980), 91-146.

[C_4] J. Cheeger, to appear.

[C_5] J. Cheeger, to appear.

[C_6] J. Cheeger, Spectral geometry of singular Riemannian spaces, to appear.

[CT] J. Cheeger, M. Taylor, On the diffraction of waves by conical singularities, preprint.

[CG] M. Cornalba, P. Griffiths, Analytic cycles and vector bundles on non-compact algebraic varieties, Inv. Math. 28 (1975), 1-106.

[D_1] P. Deligne, Théorie de Hodge. I, Actes du Congres International des Mathematiciens, Nice 1970.

[D_2] P. Deligne, Théorie de Hodge. II, Publ. Math. I.H.E.S. 40 (1971), 5-58.

[D_3] P. Deligne, Théorie de Hodge. III, Publ. Math. I.H.E.S. 44 (1974), 5-78.

[D_4] P. Deligne, La conjecture de Weil. I, Publ. Math. I.H.E.S. 43 (1974), 273-307.

[D_5] P. Deligne, Letter to D. Kazhdan and G. Lusztig (spring 1979).

[D_6] P. Deligne, Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales, Publ. Math. I.H.E.S. 35 (1968), 107-126.

[DR] G. De Rham, Variétés Differentiables, 3rd ed., Hermann, Paris, 1973. [Имеется перевод 1-го изд.: Де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия. – М.: ИЛ, 1956.]

[F] R. Fox, Covering spaces with singularities, in: Algebraic Geometry and Topology, Symp. in honor of S. Lefschetz, Princeton Univ. Press, 1957.

[FM] W. Fulton, R. MacPherson, Bivariant theories, preprint, Brown Univ., 1980. [Переведено на русский в виде ч. I настоящей книги.]

[Ga_1] M. Gaffney, The harmonic operator for differential forms, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 37 (1951), 48-50.

[Ga_2] M. Gaffney, A special Stokes theorem for Riemannian manifolds, Ann. Math. 60 (1954), 140-145.

[Go] M. Goresky, Whitney stratified chains and cochains, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

[GM_1] M. Goresky, R. MacPherson, La dualité de Poincaré pour les espaces singuliers, C.R. Acad. Sci. Paris 284 Sér. A (1977), 1549-1551.

[GM_2] M. Goresky, R. MacPherson, Intersection homology theory, Topology 19 (1980), 135-162.

[GM_3] M. Goresky, R. MacPherson, Intersection homology theory. II, to appear.

[GM_4] M. Goresky, R. MacPherson, Stratified Morse theory, preprint, Univ. of B.C., 1980.

[H] R. Hardt, Topological properties of subanalytic sets, Trans. Amer. Math. Soc. 211 (1975), 57-70.

[L] S. Lefschetz, Topology, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 12, New York, 1930.

[Ma] J. Mather, Stratifications and mappings, in: Dynamical Systems (M.M. Peixoto, ed.), Academic Press, New York, 1973.

[Mc] C. McCrory, Poincaré duality in spaces with singularities, Thes., Brandeis Univ., 1972.

[Mü] W. Müller, to appear.

[O] A. Ogus, Local cohomological dimension of algebraic varieties, Ann. Math. 98 (1973), 327-365.

[T] R. Thom, Ensembles et morphismes stratifiés, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 240-284.

[Ze] C. Zeeman, Dihomology. I, II, Proc. London Math. Soc.(3) 12 (1962), 609-638, 639-689.

[Zu_1] S. Zucker, Hodge theory with degenerating coefficients: L^2 cohomology in the Poincaré metric, Ann. Math. 109 (1979), 415-476.

[Zu_2] S. Zucker, L^2 cohomology, warped products, and arithmetic groups, preprint, 1980.

Литература, добавленная при переводе

[1] W. Borho, R. MacPherson, Représentationes groupes de Weyl et homologie intersection pour les variétes de nilpotent, C.R. Acad. Sci. Paris 292, Sér. A (1981), 707-710.

[2] J.-L. Brylinski, (Co-)homologie intersection et faisceaux pervers, Séminaire Bourbaki 585 (1981/82).

[3] J.-L. Brylinski, Modules holonomes à singularities régulieres filtration de Hodge, preprint, 1981.

[4] J.-L. Brylinski, M. Kashiwara, Kazdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, Inv. Math. 64 (1981), 387-410.

[5] P. Deligne et al., Analyse et topologie sur les espaces singulars, Conf. dans Luminy, Astérisque, to appear.

[6] O. Gabber, Pureté de la homologie de MacPherson-Goresky, preprint, 1981.

[7] O. Gabber, Cycles évanescents et faisceaux pervers, preprint, 1981.

[8] M. Kashiwara, Fasceaux constructibles et systèmes holonomes des équations aux dérivées partielles, Séminaire Goulaouic-Schwartz (1979/80).

[9] M. Kashiwara, T. Kawai, On the holonomic systems of linear differential equations (systems with regular singularities), III, RIMS, preprint.

[10] D. Kazhdan, G. Lusztig, Schubert variétes et Poincaré dualité, Proc. Symp. Pure Math. 36 (1980), 185-203.

[11] D. Kazhdan, G. Lusztig, Representations of Coxter groups and Hecke algebras, Inv. Math. 53 (1979), 165-184.

[12] G. Lusztig, Some problems on the representation theory of finite Shevalley groups, Proc. Symp. Pure Math. 37 (1980), 313-317.

[13] G. Lusztig, Green polynomials and singularities of unipotent classes, Adv. Math. 42 (1981), 169-178.

[14] G. Lusztig, Singularities of character formulas and a q-analog of weight multiplicities, preprint, 1981.

[15] G. Lusztig, D. Vogan, Singularities of closures of K-orbites on flags manifolds, preprint.

[16] Z. Mebkcont, Thes., 1979.

[17] T. Springer, Quelques applications de la homologie intersection, Séminaire Bourbaki 589 (1981/82).

[18] D. Vogan, Irreducible characters of semisimple Lie groups. III. Prooof of Kazhdan-Luśztig conjecture in the integral case, preprint.

[19] A. Beilinson, I. Bernstein, Localization de q-modules, C.R. Acad. Sci. Paris 292 Ser. A (1981), 15-18.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

Уильям Фултон, Роберт Мак-Фёрсон

КАТЕГОРНЫЙ ПОДХОД К ИЗУЧЕНИЮ
ПРОСТРАНСТВ С ОСОБЕННОСТЯМИ

Ст.научный редактор В.И.Авербух
Мл.научный редактор Л.А.Макарова
Художник А.В.Шипов
Художественный редактор В.И.Шаповалов
Технический редактор Г.Б.Алюлина
Корректор А.Я.Шехтер

ИБ № 3155

Подписано к печати 10.09.82. Формат
60x90 1/16. Бумага офсетная № 2.
Печать офсетная. Объем 6,75 бум.л.
Усл.печ.л. 13,5. Усл.кр.отт. 13,85.
Уч.-изд.л. 10,02. Изд. № 1/1990.
Тираж 4.000 экз. Зак. 6941
Цена 1 р.60 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО "МИР"
129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2.

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНИТИ
г. Люберцы, Октябрьский проспект, 403.

В СЕРИИ «МАТЕМАТИКА. НОВОЕ В ЗАРУБЕЖНОЙ НАУКЕ»

ВЫШЛИ В СВЕТ

1. Ф. Гриффитс, Дж. Кинг. Теория Неванлинны и голоморфные отображения алгебраических многообразий.
2. Вычисления в алгебре и теории чисел.
3. Л. Заде. Понятие лингвистической переменной и его применение к понятию приближенных решений.
4. Гладкие динамические системы.
5. Л. Ниренберг. Лекции по нелинейному функциональному анализу.
6. Конструктивная теория поля.
7. К. Престон. Гиббсовские состояния на счетных множествах.
8. Д. Орнстейн. Эргодическая теория, случайность и динамические системы.
9. М. Гусман. Дифференцирование интегралов в R^n.
10. Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения.
11. Гиббсовские состояния в статистической физике.
12. Евклидова квантовая теория поля. Марковский подход.
13. Р. Боуэн. Методы символической динамики.
14. Математические методы в теории систем.
15. Р. Харви. Голоморфные цепи и их границы.
16. К теории конечных групп.
17. О. О'Мира. Лекции о симплектических группах.
18. Исследования по метрической теории поверхностей.
19. Проблемы комбинаторного анализа.
20. Изоморфизмы классических групп над целостными кольцами
21. Разрешимые и простые бесконечные группы.
22. Странные аттракторы.
23. Г. Крайзель. Исследования по теории доказательств
24. Т. Спрингер. Теория инвариантов.
25. Гомотопическая теория дифференциальных форм.
26. Ж. Лере. Лагранжев анализ и квантовая механика.
27. Т. Чепмен. Лекции о Q-многообразиях.
28. Р. Мандельбаум. Четырехмерная топология.
29. Численные методы теории дифракции.